INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD.

Se denomina **experimento aleatorio** a aquel en que jamás se puede predecir el resultado.

El conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral** y se representa por **E.**

Ejemplos:

1) El espacio muestral asociado al experimento lanzar dos monedas es**:**

$E = \{cc, cx, xc, xx\}$

2) El espacio muestral asociado al experimento lanzar un dado es:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Suceso o suceso aleatorio de un experimento aleatorio es cada uno de los subconjuntos del espacio muestral. Tipos de sucesos son los siguientes:

- **Suceso elemental** es aquel formado por un solo resultado del experimento.
- **Suceso compuesto** es aquel formado por más de un resultado del experimento.
- **Suceso seguro** es el que siempre se realiza, coincide con E.
- **Suceso imposible** es el que nunca se realiza, se designa por $\varnothing$.

Ejemplo:

1) Experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda:

- Espacio muestral:	$E = \{c, x\}$
- Espacio de sucesos:	$S = \{\varnothing, \{c\}, \{x\}, \{c, x\}\}$
- Sucesos elementales:	$\{c\}, \{x\}$
- Único suceso compuesto:	$\{c, x\}$
- Suceso seguro:	$E = \{c, x\}$
- Suceso imposible:	$\varnothing$

Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, llamamos **suceso unión** de A y B al suceso que se realiza cuando se realiza A o B. Se representa por $A \cup B$.

Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, llamamos **suceso intersección** de A y B al suceso que se realiza cuando se realizan A y B. Se representa por $A \cap B$.

La **diferencia** entre dos sucesos se representa por $A - B$.

Se denomina **suceso contrario** de A a $\overline{A} = E - A$, es decir, el suceso que se produce cuando no se realiza A, también se representa por A'.

Dos sucesos tales que $A \cap B = \emptyset$ se dicen **incompatibles**.

Un suceso se verifica cuando al realizar el experimento aleatorio correspondiente el resultado obtenido es uno de los elementos de ese suceso.

AXIOMAS DE LA PROBABILIDAD:

Axioma 1: Para cualquier suceso S, debe cumplirse que $P(S) \geq 0$ (la probabilidad de un suceso no puede ser negativa).

Axioma 2: Si dos sucesos son incompatibles, entonces la probabilidad de su unión es la suma de sus probabilidades, es decir: si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Axioma 3: La probabilidad del suceso seguro (que coincide con el espacio muestral) es uno, $P(E) = 1$.

De los anteriores axiomas se deducen fácilmente las siguientes propiedades:

PROPIEDADES:

Propiedad 1: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, esta propiedad es fundamental, permite calcular la probabilidad de un suceso conociendo la de su contrario.

Propiedad 2: $P(\emptyset) = 0$.

Propiedad 3: Si $A \subset B$ entonces $P(B) = P(A) + P(B - A)$.

Propiedad 4: Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.

Propiedad 5: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. (Esta propiedad es muy importante para hacer problemas)

Propiedad 6: Si $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, entonces $P(S) = P(s_1) + P(s_2) + ... + P(s_n)$, (La probabilidad de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo forman).

Propiedad 7: **Definición de Laplace de probabilidad**:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$, donde casos posibles son todos los elementos del espacio muestral y casos favorables los elementos que componen el suceso A.

Se define la **probabilidad de B condicionada a A** como:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Observa que mide la proporción de veces que a ocurrido B de entre las que ha ocurrido A, o la que es lo mismo, la probabilidad de que ocurra B sabiendo que ha ocurrido A. La noción de probabilidad condicionada complementa el cálculo de probabilidades y permite simplificarlo de forma importante en muchos casos.

Consecuencia muy útil de esta definición es que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Se dice que dos sucesos A y B son **independientes** si se cumple:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Sustituyendo en la fórmula de la probabilidad condicionada se obtiene $P(B/A) = P(B)$, es decir, A no influye en B.

Ejemplo 1: (Propuesto en selectividad en el País Vasco, Junio 1.994)

La ruleta de un casino consta de 40 casillas numeradas del 1 al 40. Los números acabados en 1, 2, 3, 4 y 5 son rojos, y el resto negros. Puesta en marcha la ruleta se consideran los siguientes sucesos: A= "el resultado es un número de la primera decena", B= "el resultado es un número par", C= "el resultado es un número rojo". Averiguar:

a) La probabilidad $P(C - A)$.

b) La probabilidad de que el número sea de la primera decena, sabiendo que es rojo.

c) ¿Son independientes los sucesos A y B?, ¿y los sucesos A y C?.

Solución:

a) $C - A = \{\text{bolas rojas que no sean de la primera decena}\}$, hay 15, por tanto:

$$P(C - A) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

b) de las 20 bolas rojas hay 15 de la primera decena, es decir $P(A/C) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

c) Para comprobar si dos sucesos M y N son independientes comprobaremos si se cumple que $P(M \cap N) = P(M) \cdot P(N)$

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(1^{a} \text{ decena y par}) = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8} \\ P(A) = \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4} \\ P(B) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$P(A)\cdot P(B) = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$ como se cumple que $P(A)\cdot P(B) = P(A \cap B)$, A y B son independientes. Por otro lado:

$$\begin{cases} P(A \cap C) = P(1^{a} \text{ decena y rojo}) = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8} \\ P(C) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$P(A)\cdot P(C) = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$, $P(A)\cdot P(C) = P(A \cap C)$ por tanto A y C también son independientes.

Ejemplo 2:

En un pueblo hay tres partidos políticos: progresista, liberal y moderado. Se efectúa un referendum. Estos son los resultados en % en función del partido al que voto cada persona en las últimas elecciones:

	PR	**LIB**	**MOD**	**ABS**	Σ
SÍ	15%	25%	12%	8%	60
NO	25%	5%	8%	2%	40
Σ	40	30	20	10	100

(NOTA, las sumas de filas y columnas es algo que tú tendrás que hacer)

a) ¿Qué porcentaje votó a cada partido en las últimas elecciones?.

b) ¿Qué probabilidad hay de que una persona tomada al azar haya votado sí en el referendum?.

c) Calcula las siguientes probabilidades:

$$P(\text{Pr}/\text{SÍ}); P(\text{Lib}/\text{SÍ}); P(\text{SÍ}/\text{Mod}); P(\text{SÍ}/\text{Abs})$$

d) El haber votado por un partido, ¿es independiente de votar sí o no?.

e) Calcula la probabilidad de ser moderado y haber votado sí.

Solución

a) $P(\text{Pr}) = \dfrac{40}{100} = 0{,}4$; $P(\text{Lib}) = \dfrac{30}{100} = 0{,}3$; $P(\text{Mod}) = \dfrac{20}{100} = 0{,}2$; $P(\text{Abs}) = \dfrac{10}{100} = 0{,}1$

Los porcentajes se obtienen multiplicando la probabilidad por 100.

b) $P(\text{SÍ}) = \dfrac{60}{100} = 0{,}6$

c) $P(\text{Pr}/\text{SÍ}) = \dfrac{15}{60} = 0{,}25$ $\qquad P(\text{Lib}/\text{SÍ}) = \dfrac{25}{60} = 0{,}4167$

$P(\text{SÍ}/\text{Mod}) = \dfrac{12}{20} = 0{,}6$ $\qquad P(\text{SÍ}/\text{Abs}) = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$

d) Los sucesos "votar moderado en las elecciones" y "votar sí en el referendum" son independientes porque:

$P(\text{Mod}/\text{SÍ}) = 0{,}2 = P(\text{Mod})$ y $P(\text{SÍ}/\text{Mod}) = 0{,}6 = P(\text{SÍ})$

e) $P(\text{Mod} \cap \text{SÍ}) = P(\text{Mod}/\text{SÍ}) \cdot P(\text{SÍ}) = \dfrac{12}{60} \cdot \dfrac{60}{100} = \dfrac{3}{25} = 0{,}12$

Observa que también se puede hacer al revés;

$P(\text{SÍ} \cap \text{Mod}) = P(\text{SÍ}/\text{Mod}) \cdot P(\text{Mod}) = \dfrac{12}{20} \cdot \dfrac{20}{100} = \dfrac{3}{25} = 0{,}12$

E incluso, sabiendo ya que son sucesos independientes;

$P(\text{Mod} \cap \text{SÍ}) = P(\text{Mod}) \cdot P(\text{SÍ}) = \dfrac{20}{100} \cdot \dfrac{60}{100} = \dfrac{3}{25} = 0{,}12$

EJERCICIOS DE PROBABILIDAD

1. En una caja hay seis bolas numeradas, tres de ellas con números positivos y las otras tres con números negativos. Se extrae una bola y después otra sin reemplazamiento.

a) Calcular la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea positivo.

b) Calcular la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea negativo.

Solución: a) 2/5 b) 3/5

2. Se tiran dos dados.

a) Calcular la probabilidad de obtener dos números pares.

b) Calcular la probabilidad de obtener un número par y un número impar.

Solución: a) ¼ b) ½

3. Un dominó consta de 28 fichas, de las cuales 7 son dobles (blanca doble, uno doble, ... seis doble). Escogidas 3 fichas al azar, calcular la probabilidad de que alguna sea doble si:

a) se extraen las tres simultáneamente.

b) se extraen de una en una con reemplazamiento.

Nota: P (alguna) = 1 - P (ninguna)

Solución : a) 0,594 b) 0,578

4. Un 10% de las personas que viven en cierta ciudad ha padecido determinada enfermedad. Si se examinan tres personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que alguna de ellas haya padecido esta enfermedad?.

Solución: 0,271

5. En el lanzamiento de un dado se consideran los tres sucesos siguientes: A = sale un número impar; B = sale un número par; C = sale el 1 o el 2. Se pide:

a) ¿ Son independientes A y B ?
b) ¿ Son independientes A y C ?
c) Calcular P(A/C)

Solución: a) No b) Sí c) 1/2

6. Se tienen dos urnas, A y B. en A hay 8 bolas blancas y 5 negras, mientras que en B hay 4 bolas blancas y 4 bolas negras. Si se extrae una bola y resulta ser negra, calcula la probabilidad de que provenga de la urna A.

Solución : P(a/n) = $\dfrac{p(A\ y\ n)}{P(n)}$ = 10/23.

7. Sean A y B dos sucesos y $\bar{A}$ y $\bar{B}$ sus complementarios. Si se verifica que: P($\bar{B}$)=2/3, P(A∪B) = 3/4 y P (A∩B)= 1/4, hallar P(A), P(B), P ($\bar{A} \cup \bar{B}$) y la probabilidad condicionada P(A/B).

8. En una urna hay 10 bolas blancas y 12 bolas rojas. Encontrar la probabilidad de que al extraer dos bolas blancas sin devolución se obtenga una de cada color.

Solución: 40/77.

9. De una baraja de 40 cartas, se toman tres a ala vez. Hallar las siguientes probabilidades.

a) Las tres cartas son del mismo palo.
b) Las tres son pares o espadas (nota: son pares el 2, 4, 6, sota y rey)
c) Son de palos distintos.

Solución: a) 12/247 b) 115/494 c) 100/247

10. Si se lanzan dos dados, calcular la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos sea par, condicionado a que en uno de los dados el resultado obtenido haya sido números tres.

Solución: 5/11