EXAMEN 2°C MAT. APLIC. II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión 5-5-11

(1°) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$.

a/ Calculo su punto de inflexión

$f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f''(x) = 6x - 6$

Igualo a cero

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

Veo el signo de $f''(x)$

$$\begin{array}{ccccc} & - & & + & \\ \hline & \cap & 1 & \cup & \end{array}$$

y, efectivamente, $x=1$ es un punto de inflexión.

La pendiente de la recta tangente es $f'(1)$

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$ y si $x=1$ $f(1) = 1 - 3 - 4 = -6$

por tanto el punto es el $(1, -6)$

y la ecuación de la tangente es

$$y + 6 = -3(x - 1)$$

b/ Veo los puntos críticos

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(3x - 6) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

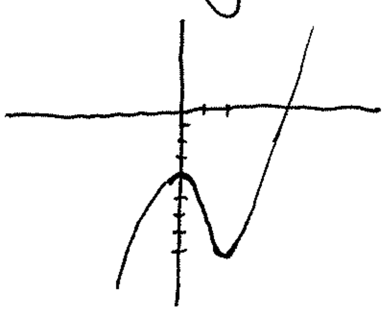
Veo signo de $f'(x)$

$$\begin{array}{ccccccc} & + & & - & & + & \\ \hline & \nearrow & 0 & \searrow & 2 & \nearrow & \end{array}$$

Por tanto hay un máximo en $x=0 \Rightarrow y = -4$

y un mínimo en $x = 2 \Rightarrow y = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 = -8$

El dibujo sería



2°

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<0 \\ ax+b & \text{si } x \in [0,3] \\ x-5 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

a/ Excepto en $x=0$ y $x=3$ $f(x)$ es continua por ser polinómica. Estudio la continuidad en estos dos puntos.

$x=0$

$$\left.\begin{array}{l} = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2+1 = 1 \\ f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} ax+b = b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{es cont. en} \\ x=0 \text{ si} \\ b=1 \end{array}$$

$x=3$

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} ax+b = 3a+b \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} x+5 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{es cont} \\ \text{en } x=3 \\ \text{si } 3a+b=-2 \end{array}$$

Por tanto

$$\left.\begin{array}{l} b=1 \\ 3a+b=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a+1=-2 \Rightarrow a=-1$$

Es continua si $a=-1$ y $b=1$

b/ Para que $f(x)$ sea derivable en $x=3$ debe ser continua en ese punto (es decir $3a+b=-2$) y su derivada debe ser continua

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x<0 \\ a & \text{si } x \in [0,3] \\ 1 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

Veo cuando $f'(x)$ es continua en $x=3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} a = a \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f'(x) \text{ es cont en} \\ x=3 \text{ si } \quad a=1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ 3a+b=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3+b=-2 \Rightarrow b=-5$$

Para $a=1$ y $b=-5$ $f(x)$ es derivable en $x=3$

③ $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$ $\qquad$ $\mathrm{Dom}\, f(x)=\mathbb{R}-\{2\}$

a/ Asíntotas verticales $x=2$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{2-x}=\frac{+}{+}\infty=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{2-x}=\frac{+}{-}\infty=-\infty$$

Asíntota horizontal

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2-x}=\mp\infty \qquad \text{No hay}$$

Asíntota oblicua $\quad y=mx+b$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x-x^2}=-1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2-x}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x(2-x)}{2-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{2-x}=-2$$

$\Rightarrow y=-x-2$ es la asíntota oblicua

b/ Derivo $\quad f'(x)=\dfrac{2x(2-x)-x^2(-1)}{(2-x)^2}=\dfrac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2}=$

$$=\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}$$

Veo puntos críticos

$f'(x)=0 \Rightarrow 4x-x^2=0 \Rightarrow x=0$ y $x=4$

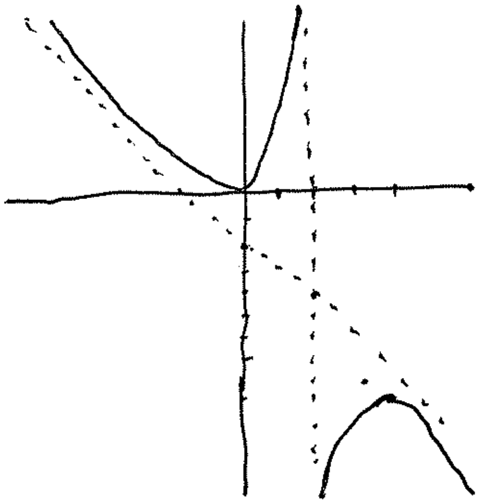
Veo signo de $f'(x)$

		0		2		4	
	$-$ $-$		$+$		$+$		$-$
	$+$ $+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$		$+$		$+$		$-$
	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Hay un mínimo en $x=0 \Rightarrow y=0$

Hay un máximo en $x=4 \Rightarrow y=-8$

c/



(4º) $f(x) = ax^2 + bx + c$

Si $f(1) = 3 \Rightarrow a + b + c = 3$

Tangente paralela a $y = 2x \Rightarrow$ tiene pendiente 2

$\Rightarrow f'(0) = 2$

Derivo $f'(x) = 2ax + b$ y tengo

$f'(0) = b = 2$

Si hay un mínimo en $x = -1$ este es un punto crítico $\Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow -2a + b = 0$

Tengo finalmente

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c = 3 \\ b = 2 \\ -2a + b = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow -2a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ \Rightarrow 1 + 2 + c = 3 \Rightarrow c = 0 \end{array}$$

Por tanto, para que se cumplan las condiciones dadas

$a = 1,\ b = 2$ y $c = 0$

NOTA: Se ve que al ser una parábola con $a > 0$, el pto crítico es un mínimo.

⑤ $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$ Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$

a/ Asíntotas verticales en $x=-3$ y $x=3$
Veo límites laterales

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{+}{-\cdot -}\infty = +\infty \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{+}{-\cdot +}\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \frac{+}{-\cdot +}\infty = -\infty \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{+}{+\cdot +}\infty = +\infty$$

Asíntota horizontal

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-9} = 1 \Rightarrow y = 1$$

b/ Derivo $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-9) - x^2\cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \dfrac{-18x}{(x^2-9)^2}$

Veo puntos críticos

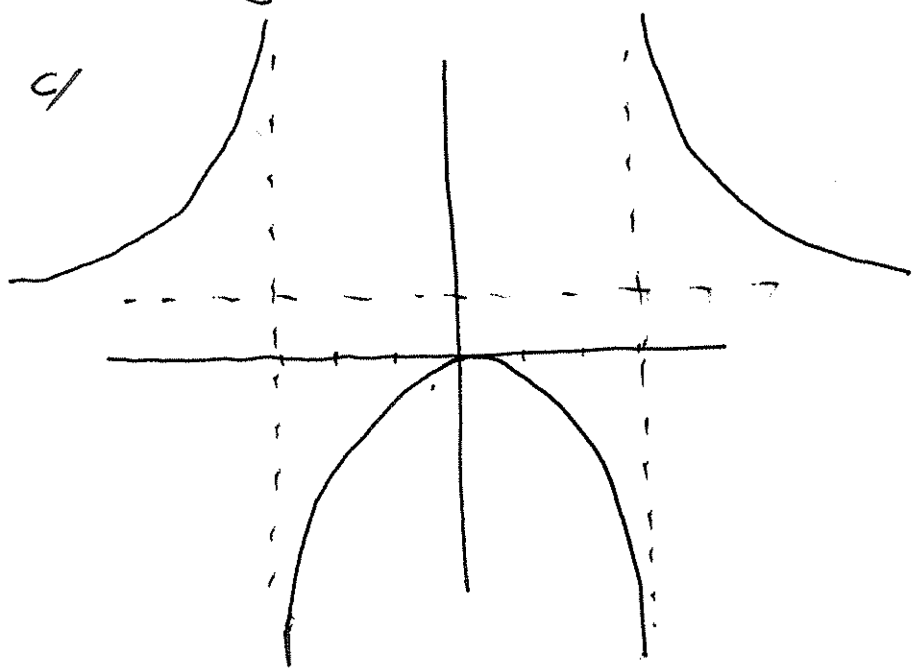
$f'(x) = 0 \Rightarrow -18x = 0 \Rightarrow x = 0$

Veo signo de $f'(x)$

	-3		0		3	
+		+		−		−
+		+		+		+
+		+		−		−
↗		↗		↘		↘

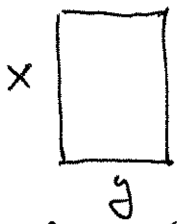
Por tanto hay un máximo en $x=0 \Rightarrow y=0$

c/



(5/6)

6°



$x =$ alto de la ventana

$y =$ ancho " " "

La función que da el precio de la ventana será $f(x,y) = 50\cdot 2x + 25\cdot 2y = 100x + 50y$

Sé que $A = 2\ m^2 \Rightarrow x\cdot y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$

y tengo que

$$f(x) = 100x + \frac{100}{x} = \frac{100x^2 + 100}{x}$$

Derivo

$$f'(x) = \frac{200x\cdot x - (100x^2+100)}{x^2} = \frac{100x^2 - 100}{x^2}$$

Veo puntos críticos

$f'(x) = 0 \Rightarrow 100\cdot x^2 - 100 = 0 \Rightarrow x = +1$ (x no puede ser negativa)

Veo signo de $f'(x)$ $\quad \underset{\searrow}{-}\ \ 1\ \ \underset{\nearrow}{+}$

y el mínimo es $x = 1 \Rightarrow y = 2$

Calculo $f(1,2) = 100 + 50\cdot 2 = 200$

Por tanto el mínimo se alcanza en una ventana de base 2 y altura 1, con un gasto de 200 €