EXAMEN 2ºA MAT. APLIC. CCSS II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión 29-4-08

① $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-9}}$.

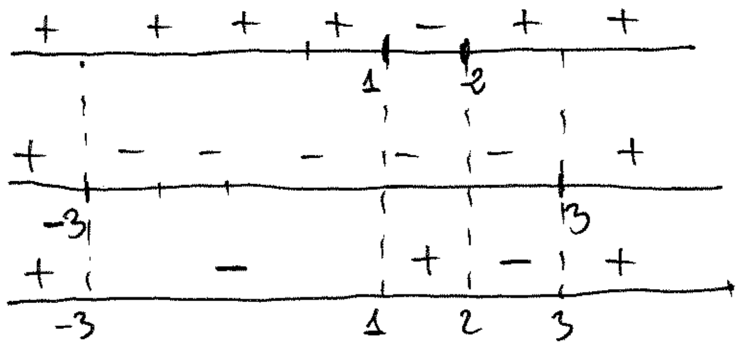
Estudio cuando $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-9} \geq 0$

NUM $x^2-3x+2=0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

DEN $x^2-9=0$

$x = \pm 3$



Por tanto Dom $f(x) = (-\infty,-3) \cup [1,2] \cup (3,\infty)$

② $f(x) = \dfrac{2e^x-1}{1+e^x}$

$\dfrac{2e^x-1}{1+e^x} = y$

$2e^x-1 = y(1+e^x)$

$2e^x-1 = y+ye^x$

$2e^x-ye^x = y+1$

$e^x(2-y) = y+1$

$e^x = \dfrac{y+1}{2-y}$

$x = \ln\left(\dfrac{y+1}{2-y}\right)$

Por tanto $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{2-x}\right)$

3º a/ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-3}-2x} \to \frac{1}{\infty-\infty}$

multiplico y divido por el conjugado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}+2x}{(\sqrt{x^2-3}-2x)(\sqrt{x^2-3}+2x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}+2x}{x^2-3-4x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}+2x}{-3x^2-3} \overset{(*)}{=} 0$$

(*) grado del numerador $\simeq 1$, grado denominador $= 2$

b/ $\lim_{x\to 2} \frac{3x}{x^2-3x+2} \to \frac{6}{0}$ $\nexists$

Veo límites laterales. Primero factorizo

$x^2-3x+2=0$

$x = \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 2 \end{matrix}$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3x}{(x-1)(x-2)} = \frac{+}{+\cdot -}\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3x}{(x-1)(x-2)} = \frac{+}{+\cdot +}\infty = +\infty$$

4º $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^2+5x-6} & \text{si } x<1 \\ \frac{4x^2+1}{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

Para que sea continua en $x=1$ debe cumplirse

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

Calculo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x^2+5x-6} \to \frac{0}{0}$$

factorizo

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2+5x-6=0$

$$x = \frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{2} = \frac{-5\pm 7}{2} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow -6 \end{matrix}$$

Por tanto tengo

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+6)} = \frac{3}{7}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{4x^2+1}{x} = 5$$

$$f(1) = 5$$

$\Rightarrow$ No es continua en $x=1$. Hay una discont. inevitable de 1ª esp.

⑤ $f(x) = \begin{cases} 3x^2+ax+b & \text{si } x<2 \\ 2ax+b & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

Veo la continuidad de $f(x)$ en $x=2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3x^2+ax+b = 2a+b+12$$

$$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 2ax+b = 4a+b$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow 2a+b+12 = 4a+b \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a=6$

Si $a=6 \Rightarrow f(x)$ es continua en $x=2$

Derivo $f'(x) = \begin{cases} 6x+a & \text{si } x<2 \\ 2a & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

Veo si $f'(x)$ es continua en $x=2$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} 6x+a = 12+a$$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} 2a$$

$\Rightarrow 12+a = 2a \Rightarrow$

$\Rightarrow a=12$

Por tanto como a no puede ser 6 y 12 a la vez la función nunca será derivable en $x=2$