EXAMEN 2°A MAT. APLIC. II

SOLUCIÓN salvo error u omisión. 23-4-12

① a/ $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-x}\right) \to \infty - \infty$ Indet.

multiplico y divido por el conjugado.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3x-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{-4}{2} = -2$$ (el signo menos viene de $x\to -\infty$)

b/ $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-3x+4}{x^2-1} \to \frac{0}{0}$ Indet.

Factorizo

$x^3-2x^2-3x+4=0$ $\qquad$ $x^2-1 = (x+1).(x-1)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -3 & 4 \\ 1 & & 1 & -1 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2-x-4)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{-4}{2} = -2$$

② $f(x)$ es continua para todos los puntos excepto para $x=0$ y $x=3$ por ser polinómica. Estudio la continuidad en $x=0$ y $x=3$

$x=0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+2)=2\\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax^2+bx+c)=c\end{array}\right\}\Rightarrow c=2$$

$x=3$

$$\left.\begin{array}{l}f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}(ax^2+bx+c)=9a+3b+c\\ \lim\limits_{x\to 3^+}(3-x)=0\end{array}\right\}=\underset{0}{\overset{}{9a+3b+c}}$$

Derivo:

$$f'(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x<0\\ 2ax+b & \text{si } 0\leq x\leq 3\\ -1 & \text{si } x>3\end{cases}$$

$f(x)$ es derivable en 0 si además de continua $f'(x)$ es continua, es decir:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2=2\\ \lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2ax+b)=b\end{array}\right\}\Rightarrow b=2$$

Por tanto, debe cumplirse que

$$\left.\begin{array}{l}c=2\\ 9a+3b+c=0\\ b=2\end{array}\right\}\Rightarrow 9a+6+2=0\Rightarrow a=\frac{-8}{9}$$

y por tanto $(a,b,c)=\left(-\frac{8}{9},2,2\right)$

(3°) Dom $f(x)=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$

A. Verticales: $x=-2$ $x=2$

Veo límites laterales.

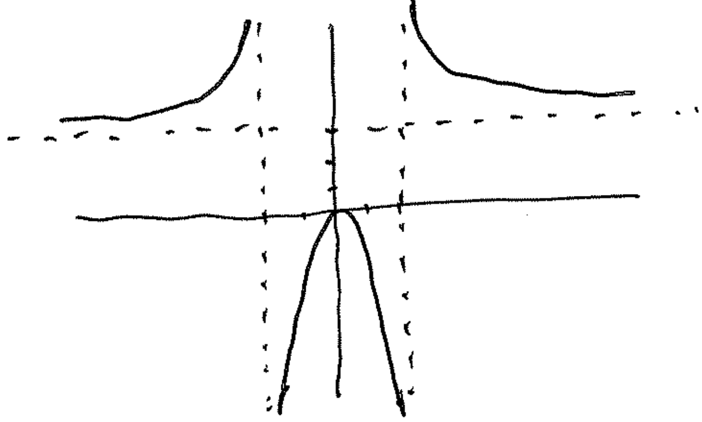
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{3x^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{+}{--}\infty = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{3x^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{+}{+-}\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{3x^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{+}{+-} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{3x^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{+}{++}\infty = +\infty$$

A Horizontal

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{x^2-4} = 3 \Rightarrow y = 3$$

No Hay A. oblicua.



b/ Calculo $f'(x) = \frac{6x(x^2-4) - 3x^2\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-24x}{(x^2-4)^2}$

$f'(0) = 0$; si $x=0 \Rightarrow f(0) = 0$

por tanto $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = 0$

es la ec de la tangente.

(4º) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

a/ Corte con OX $\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = 3 \Rightarrow (3,0)$ y $(0,0)$

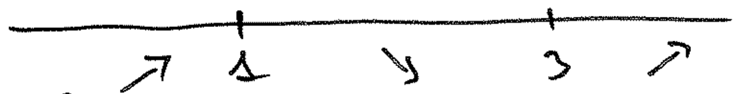
Corte con OY $\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$

b/ Derivo $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Ptos críticos $\Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{array}$

Veo signo



Por tanto

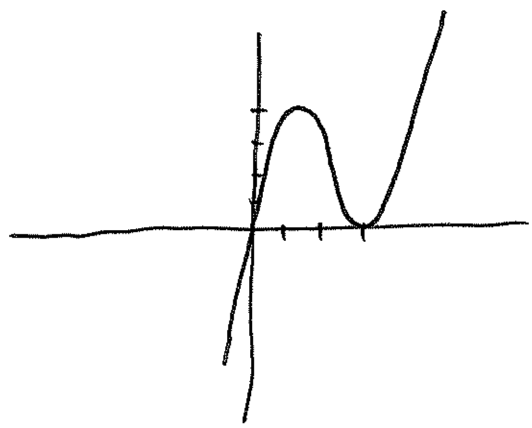
$f(x)$ crece $\forall x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

decrece $\forall x \in (1, 3)$

máximo $x = 1 \Rightarrow y = 4$

mínimo $x = 3 \Rightarrow y = 0$

c/



(5°) Busco que sea paralela a $2x - y = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow$ con pendiente $m = 2$

Derivo $f'(x) = 6x - 2$

$\Rightarrow 6x - 2 = 2 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Es decir,

el punto es $x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + 4 = 4$

sé que $y - y_0 = m(x - x_0)$ y la recta pedida es

$y - 4 = 2\left(x - \frac{2}{3}\right)$

⑥ $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$

- Veo simetría

Par: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = \dfrac{-x^3}{1-x^2} \neq f(x)$

Impar $-f(-x) = \dfrac{x^3}{1-x^2} = f(x)$ Hay impar

- Asíntotas

El dom $f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

Verticales $x=-1$ y $x=1$

$\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^3}{(1+x)(1-x)} = \dfrac{-}{-\cdot+}\infty = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \dfrac{-}{+\cdot+}\infty = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

Horizontales

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ No hay.

Oblicuas

$m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{x-x^3} = -1$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^3}{1-x^2} + x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+x-x^3}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{1-x^2} = 0$

$y = -x$

- Monotonía.

$f'(x) = \dfrac{3x^2(1-x^2) - x^3\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{-x^4+3x^2}{(1-x^2)^2}$

Ptos críticos $-x^4+3x^2=0 \Rightarrow x^2(-x^2+3)=0$

$\Rightarrow x=0$

$-x^2+3=0 \Rightarrow x=\pm 3$

Veo signo

	$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$-$		$+$		$+$		$+$		$+$		$-$
$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$-$		$+$		$+$		$+$		$+$		$-$
$\searrow$	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$

$f(x)$ crece $\forall x \in (-\sqrt{3},-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,\sqrt{3})$

decrece $\forall x \in (-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty)$

Máximo $x=\sqrt{3}$

mínimo $x=-\sqrt{3}$