EXAMEN 2°A MAT. APLIC. II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión. 20-4-10

① a/ $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2-4x}{\operatorname{sen} x}}} \cdot \dfrac{(2x-4)\cdot \operatorname{sen} x - (x^2-4x)\cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

b/ $y' = \ln 2 \cdot 2^{\frac{4x-1}{x}} \cdot \dfrac{4x-(4x-1)}{x^2}$

c/ $y' = 3(x^2-3x)^2\cdot(2x-3)\cdot\sqrt{x} + (x^2-3x)^3\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

d/ $y' = \dfrac{5}{\ln 10}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\frac{x}{e^x}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{x}{e^x}}}\cdot\dfrac{e^x - x e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{x\ln 10} - 1\right)$

② Veo la pendiente de la tg. sé que es paralela a $3x+y=5 \Rightarrow y=-3x+5 \Rightarrow m=-3$

Por tanto $y'=-3 \Rightarrow 2x-1=-3 \Rightarrow x=-1$

Si $x=-1 \Rightarrow y=(-1)^2-(-1)+2=4 \Rightarrow$ pasa por el punto $(-1,4)$, y por tanto la recta pedida es

$y-4=-3(x+1)$

③ a/ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{x^3-x} - \dfrac{2}{1-x^2}\right) \to \pm\infty - \pm\infty$ Indeterm.

$$\left.\begin{aligned} x^3-x &= x(x+1)(x-1)\\ 1-x^2 &= -(x+1)(x-1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{mcm} = x(x+1)(x-1)$$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1+2x}{x(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+1}{x(x+1)(x-1)} \to \dfrac{4}{0}\ \nexists$

Veo límites laterales

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3x+1}{x(x+1)(x-1)} = \dfrac{+}{+\cdot+\cdot-}\infty = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+1}{x(x+1)(x-1)} = \dfrac{+}{+\cdot+\cdot+}\infty = +\infty$

b/ $\lim_{x\to 1} \frac{3x-3}{x^3+2x^2-x-2} \to \frac{0}{0}$ Indeterm.

Factorizo

$x^3+2x^2-x-2=0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+3x+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{3}{x^2+3x+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

4°

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{9-8x-x^2} & \text{si } x<1 \\ a & \text{si } x=1 \\ 2bx+3 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Para que sea continua en $x=1$ debe cumplirse que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ Calculo.

* $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{9-8x-x^2} \Rightarrow \frac{0}{0}$

Factorizo

$9-8x-x^2=0$

$x^2+8x-9=0$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{2} = \frac{-8\pm 10}{2} \begin{cases} 1 \\ -9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{-\cancel{(x-1)}(x+9)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x+1)}{x+9} = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5}$$

* $f(1)=a$

* $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2bx+3) = 2b+3$

Tengo que $-\frac{1}{5} = a = 2b+3$ y por tanto

$$2b+3 = \frac{-1}{5} \Rightarrow 2b = -\frac{1}{5}-3 \Rightarrow 2b = \frac{-16}{5} \Rightarrow b = -\frac{8}{5}$$

Será continua en $x=1$ si

$$a=-\frac{1}{5} \text{ y } b=-\frac{8}{5}$$

(5°) $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$

- Pasa por $(0,0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$
- Máximo en $(1,2) \Rightarrow$
  - $f(1) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2$
  - $f'(1) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow 3a + 2b = 0$

Por tanto tengo el sistema

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=2 \\ 3a+2b=0 \\ c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=2 \\ 3a+2b=0 \end{array}\right\} \quad a = 2-b$$

$$3(2-b) + 2b = 0 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a = -4$$

Es decir

$$a = -4, \; b = 6 \text{ y } c = 0$$

(6°) $f(x) = \dfrac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}$

a/ Veo cuando divido por cero

$$2x^2 + 2x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow -3 \end{array}$$

Por tanto $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

b/ Por ser cociente de polinomios $f(x)$ es continua en todo su dominio, es decir

$f(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

c/ Asíntotas verticales $x = -3$ $x = 2$

Estudio los límites laterales

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{-x^3+1}{2(x+3)(x-2)} = \frac{+}{-\cdot -}\infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{-x^3+1}{2(x+3)(x-2)} = \frac{+}{+\cdot -}\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{-}{+\cdot -}\infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{-}{+\cdot +}\infty = -\infty$$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12} \to \mp\infty \quad \text{No hay}$$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{-x^3+1}{2x^3+2x^2-12x} = -\frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to \pm\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to \pm\infty}\left(\frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12} + \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to \pm\infty} \frac{-x^3+1+x(x^2+x-6)}{2x^2+2x-12} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2-6x+1}{2x^2+2x-12} = \frac{1}{2}$$

La asíntota oblicua es $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

7º $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

Asíntotas verticales $x=-1$ $x=1$

Veo límites laterales

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-}{+\cdot -}\infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{1-x^2} = \frac{-}{+\cdot +}\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x^2} = \frac{+}{+\cdot+}\infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x^2} = \frac{+}{-\cdot+}\infty = -\infty$$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ es la asint. horiz.}$$

No tiene asíntotas oblicuas.

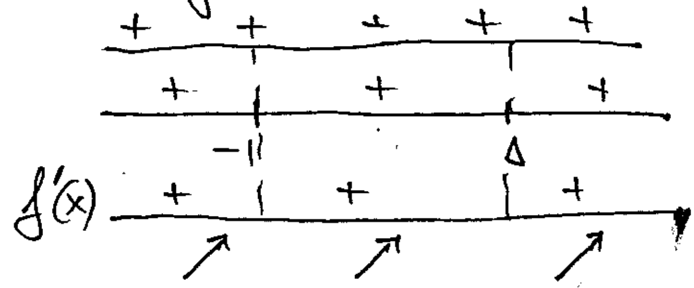
Estudio $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{1-x^2-x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$$

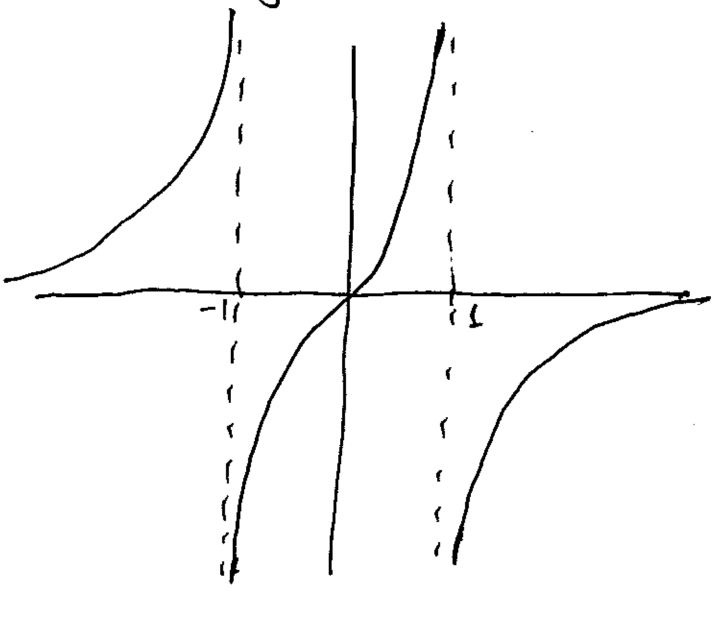
Veo sus puntos críticos

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow$ No tiene solución y por tanto, no tiene ptos críticos.

Veo su signo



Por tanto $f(x)$ es creciente $\forall x \in \mathrm{Dom}\, f(x)$



8º) Llamo x e y a los dos sumandos.

Quiero minimizar la función

$$f(x,y) = 5x^2 + 6y^2$$

Sé que $x + y = 44 \Rightarrow y = 44 - x$

Por tanto

$$f(x) = 5x^2 + 6(44-x)^2 =$$

$$= 5x^2 + 6(1936 - 88x + x^2) = 5x^2 + 11616 - 528x + 6x^2 =$$

$$= 11x^2 - 528x + 11616$$

Calculo su mínimo

$$f'(x) = 22x - 528$$

Ptos críticos

$$22x - 528 = 0 \Rightarrow x = \frac{528}{22} = 24$$

Veo signo de $f'(x)$

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \searrow & 24 & \nearrow \end{array}$$

Por tanto el mínimo se alcanza en $x = 24$

$\Rightarrow y = 44 - 24 = 20.$

Solución: $44 = 24 + 20$