RECUPERACIÓN 3ª EVALUACIÓN — 2ºA — MAT. APLIC. II — 15-5-09

SOLUCIÓN — Salvo error u omisión

1º a) $y' = e^{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}} \cdot \dfrac{2\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot x - \operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{2^x}{\ln x^2}}} \cdot \dfrac{2^x \ln 2 \cdot \ln x^2 - 2^x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x}{(\ln x^2)^2}$

2º $f(x) = \dfrac{x^3}{a} - ax^2 + 5x + 10$

a) Derivo $f'(x) = \dfrac{3x^2}{a} - 2ax + 5$

$f'(1) = 0$ puesto que $x=1$ debe ser pto crítico

$f'(1) = \dfrac{3}{a} - 2a + 5 = 0 \Rightarrow \dfrac{3 - 2a^2 + 5a}{a} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2a^2 + 5a + 3 = 0 \Rightarrow 2a^2 - 5a - 3 = 0$

$a = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \dfrac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} 3 \\ -1/2 \end{cases}$

Veo el signo para cada valor de a de $f'(x)$ para ver si son máximos o mínimos

Si $a = 3 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 6x + 5$. Sé que $f'(1) = 0$

$+ \qquad -$

$\nearrow \; 1 \; \searrow$

Si $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = -6x^2 + x + 5$ también $f'(1) = 0$

$+ \qquad -$

$\nearrow \; 1 \; \searrow$

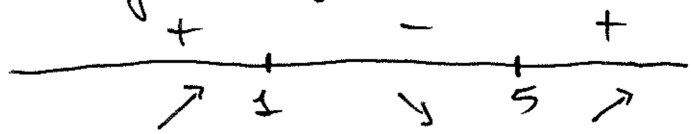
Hay máximo para $a = 3$ y $a = -1/2$

b/ Si $a=3 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 6x + 5$

Ptos críticos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

Veo el signo de $f'(x)$

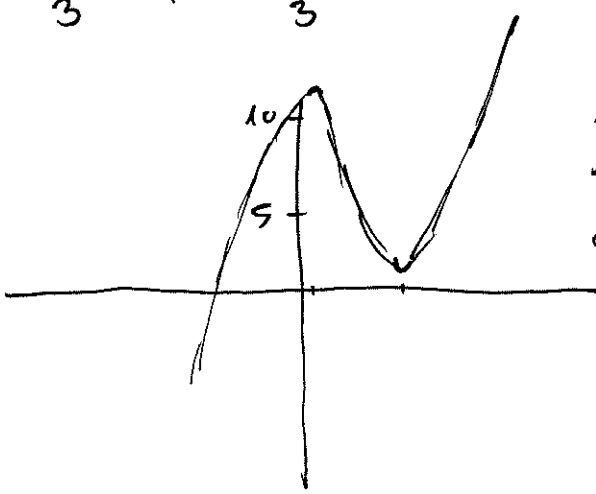


por tanto hay un máximo en $x=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{3} - 3 + 5 + 10 = \frac{1}{2} + 12 = \frac{25}{2}$$

y un mínimo en $x=5 \Rightarrow f(5) = \frac{125}{3} - 3 \cdot 25 + 25 + 10 =$

$$= \frac{125}{3} - 40 = \frac{5}{3}$$



El dibujo es aproximado. Me baso únicamente en los máximos y mínimos

(3º) $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

a/ Calculo $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$$

la pendiente va a ser $f'(1) = \dfrac{1+3}{(1+1)^2} = 1$

pasa por el punto $x=1 \Rightarrow y = f(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ $(1, 1/2)$

y la recta tangente es

$$y - \frac{1}{2} = x - 1$$

(2/5)

b/ El dominio es $\mathbb{R}$

A. Verticales no hay

A. Horizontales

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \pm\infty \quad \text{No hay}$$

A. Oblicuas

$y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x(x^2+1)}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0$$

$\Rightarrow$ la asíntota oblicua es $y = x$

4º $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x}$

$\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

a/ A. Verticales. $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x+2}{x} = \frac{+}{-} \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x+2}{x} = \frac{+}{+} = +\infty$$

A. Horizontales.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{No hay}$$

A. Oblicuas

$y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x+2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x+2}{x} - x =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x+2-x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \quad y = x+1$$

b/ Derivo $f'(x) = \dfrac{(2x+1)\cdot x - (x^2+x+2)}{x^2} =$

$$= \frac{2x^2+x-x^2-x-2}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2}$$

Veo puntos críticos

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-2}{x^2}=0 \Rightarrow x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

Veo signo de $f'(x)$

		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
	$+$		$-$		$-$		$+$
	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$

Por tanto

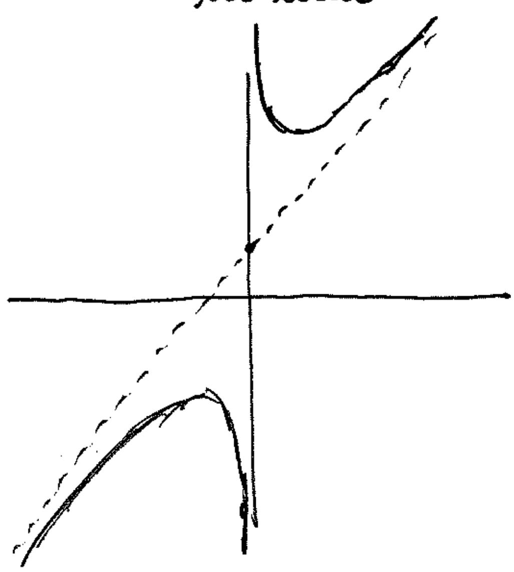
$f(x)$ crece $\forall x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

decrece $\forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - \{0\}$

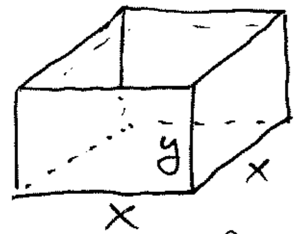
máximo en $x = -\sqrt{2}$

mínimo en $x = \sqrt{2}$

c/

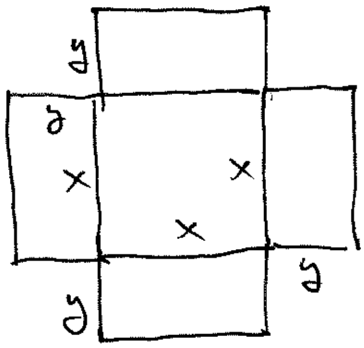


5°



Llamo x al lado de la base e y a la altura

Veo su superficie



$$S(x,y) = x^2 + 4x\cdot y$$

Sé que $V = 500 \Rightarrow$

$$V = x^2\cdot y = 500 \Rightarrow y = \frac{500}{x^2}$$

y por tanto $S(x) = x^2 + 4x\cdot\frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x} =$

$$= \frac{x^3+2000}{x}$$

Derivo $S'(x) = \frac{3x^2\cdot x - (x^3+2000)}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 - 2000}{x^2} =$

$$= \frac{2x^3 - 2000}{x^2}.$$

Veo puntos críticos

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 2000 = 0 \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = 10$$

Veo signo

		10	
$S'(x)$	$-$		$+$
	$\searrow$		$\nearrow$

Es decir, el mínimo se alcanza cuando $x = 10 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \frac{500}{10^2} = 5$$

Las dimensiones son $10 \times 10 \times 5$ dm