EXAMEN 2ºA MAT. APLIC. CCSS II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión 14-5-08

(1º) $f(x) = \frac{2-x}{x+1}$

a/ $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$

b/ Asíntotas.

Verticales $x = -1$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2-x}{x+1} = \frac{+}{-}\infty = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2-x}{x+1} = \frac{+}{+}\infty = +\infty$$

Horizontales

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2-x}{x+1} = -1 \Rightarrow y = -1$$

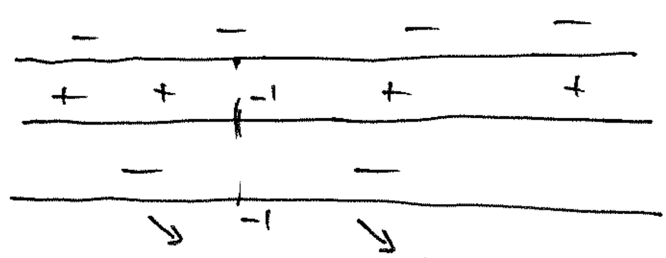
Oblicuas, no hay

c/ $f'(x) = \frac{-(x+1)-(2-x)}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{-x}-1-2\cancel{+x}}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2}$

Veo ptos críticos

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-3}{(x+1)^2} = 0$ No soluc $\Rightarrow$ no tiene ptos críticos

Veo signo de $f'(x)$

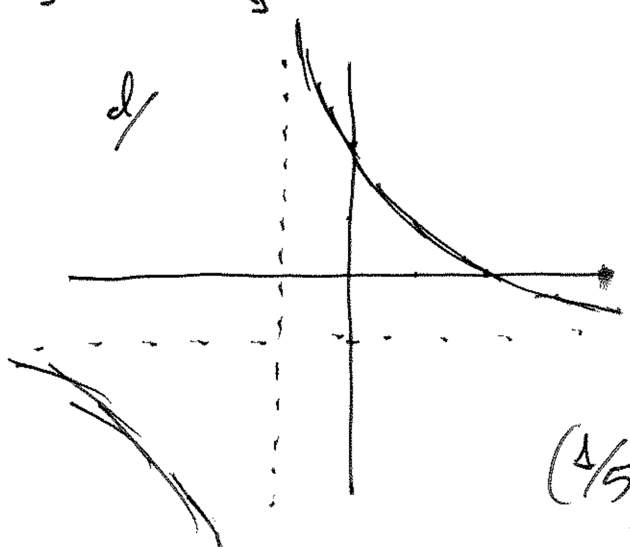


Crece no crece nunca

Decrece $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Max y min no tiene

d/



2º a/ Veo par $f(x) = f(-x)$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-4}{2(-x)^3} = \frac{x^2-4}{-2x^3} = \frac{-x^2+4}{2x^3} \neq f(x)$$

No tiene simetría par.

Veo impar $f(x) = -f(-x)$

$$-f(-x) = -\left(\frac{-x^2+4}{2x^3}\right) = \frac{x^2-4}{2x^3} = f(x)$$

Tiene simetría impar

b/ $f(x) = \dfrac{x^2}{x-4}$ $\quad$ Dom $f(x) = \mathbb{R}-\{4\}$

A. Vertical $\quad x=4$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x^2}{x-4} = \frac{+}{-}\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{x^2}{x-4} = \frac{+}{+}\infty = +\infty$$

A Horizontal

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2}{x-4} = \pm\infty \quad \text{No tiene}$$

A Oblicua $\quad y = mx+b$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-4x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-4}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x(x-4)}{x-4} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x^2+4x}{x-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x-4} = 4$$

$y = x+4$ es la asint. oblicua

3º $f(x)=\frac{(x-3)^2}{x+3}$ Dom $f(x)=\mathbb{R}-\{-3\}$

a/ A. Vertical $x=-3$

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{(x-3)^2}{x+3}=\frac{+}{-}\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{(x-3)^2}{x+3}=\frac{+}{+}\infty=+\infty$$

A Horizontal

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{(x-3)^2}{x+3}=\pm\infty \quad \text{No tiene}$$

A Oblicua $y=mx+b$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-3)^2}{x^2-3x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-6x+9}{x+3}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-6x+9-x(x+3)}{x+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-6x+9-x^2-3x}{x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-9x+9}{x+3}=-9$$

$y=x-9$ A. Oblicua

b/ Derivo $f'(x)=\frac{2(x-3)(x+3)-(x-3)^2}{(x+3)^2}=$

$$=\frac{2(x^2-9)-(x^2-6x+9)}{(x+3)^2}=\frac{2x^2-18-x^2+6x-9}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x-27}{(x+3)^2}$$

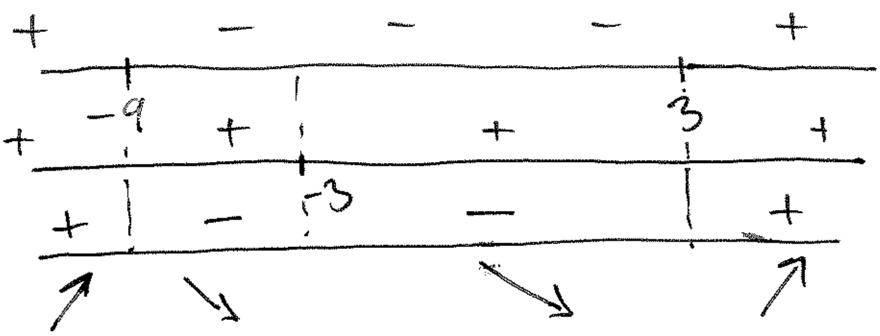
Veo ptos críticos

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2+6x-27=0$

$$\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36+4\cdot 27}}{2}=\frac{-6\pm 12}{2}\begin{cases}3\\-9\end{cases}$$

Ptos críticos $x=3$ y $x=-9$

Veo el signo de $f'(x)$



Por ~~tanto~~ $f(x)$

crece $\quad \forall x \in (-\infty,-9) \cup (3,\infty)$

Decrece $\quad \forall x \in (-9,3)-\{-3\}$

Máximo $\quad x=-9 \Rightarrow y=\dfrac{(-9-3)^2}{-9+3}=-24$

Mínimo $\quad x=3 \Rightarrow y=\dfrac{(3-3)^2}{x+3}=0$

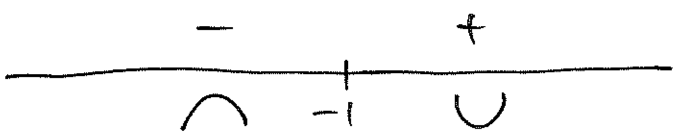
4º a/ $f(x)=x^3+3x^2-x+5$

Derivo $\quad f'(x)=3x^2+6x-1$

Calculo $f''(x) \quad f''(x)=6x+6$

$f''(x)=0 \Rightarrow 6x+6=0 \Rightarrow x=-1$ posible punto de inflexión.

Veo signo de $f''(x)$



Por ~~tanto~~ $f(x)$ es:

Concava $\cap \quad \forall x \in (-\infty,-1)$

Convexa $\cup \quad \forall x \in (-1,\infty)$

Hay un pto de inflexión en $x=-1 \Rightarrow y=(-1)^3+3(-1)^2-(-1)+5$
$=8$

b/ $f(x) = x^3 + px + q$

tg paralela a $2x - y = 1 \Rightarrow y = 2x + 1$

$\Rightarrow$ pdte $m = 2$

Derivo $f'(x) = 3x^2 + p$

Por ~~tanto~~

pasa por $(1,3) \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow 1 + p + q = 3 \Rightarrow p + q = 2$

$f'(1) = 2 \Rightarrow 3 + p = 2 \Rightarrow p = -1$

$\Rightarrow q = 3.$

Es decir $p = -1$ y $q = 3$

5°

El volumen de la caja va dado por

$V(x) = x \cdot (20-2x)(15-2x) = x(300 - 40x - 30x + 4x^2)$

$= 300x - 70x^2 + 4x^3.$

Calculo su máximo. Derivo

$V'(x) = 300 - 140x + 12x^2$

Veo ptos críticos; $V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 140x + 300 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 35x + 75 = 0 \Rightarrow x = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 - 12 \cdot 75}}{6} = \frac{35 \pm \sqrt{325}}{6}$

$\Rightarrow$ ptos críticos $x = \frac{35 \pm \sqrt{325}}{6}$

Veo signo $V'(x)$

El máximo se alcanza para

$x = \frac{35 - \sqrt{325}}{6} \simeq 2'83$

(5/5)