EXAMEN 2ºA MAT. APLIC. II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión 13-5-09

① $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x}$ calculo $f^{-1}(x)$

$$\frac{e^x+1}{e^x} = y \Rightarrow e^x + 1 = y e^x \Rightarrow y e^x - e^x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x(y-1) = 1 \Rightarrow e^x = \frac{1}{y-1} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{1}{y-1}\right)$$

Por lo tanto $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

② a/ $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\ln x}}} \cdot \dfrac{\cos x \cdot \ln x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{(\ln x)^2}$

b/ $y' = 3^{\frac{(x^2-1)^3}{\cos x}} \cdot \ln 3 \cdot \dfrac{3(x^2-1)^2 \cdot 2x \cdot \cos x - (x^2-1)^3 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$

③ $f(x)$ es derivable para todos los valores diferentes de 1 por ser polinómica.

Veo en $x=1$ si es continua

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3x^2 - ax + b = 3 - a + b$$

$$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} ax^3 - bx + 2 = a - b + 2$$

$\Rightarrow$ es continua si $3 - a + b = a - b + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a - 2b = 1$

Derivo $f(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x - a & \text{si } x < 1 \\ 3ax^2 - b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Veo si $f'(x)$ es continua en $x=1$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} 6x - a = 6 - a$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} 3ax^2 - b = 3a - b$$

$$\Rightarrow 6 - a = 3a - b \Rightarrow 4a - b = 6$$

Por tanto será derivable cuando se cumpla que:

$$\left.\begin{array}{l} 2a - 2b = 1 \\ 4a - b = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 4a - 6$$

$$\Rightarrow 2a - 2(4a-6) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a - 8a + 12 = 1 \Rightarrow -6a = -11 \Rightarrow a = \frac{11}{6}$$

$$\Rightarrow b = 4 \cdot \frac{11}{6} - 6 = \frac{22}{3} - 6 = \frac{22-18}{3} = \frac{4}{3}$$

Es decir $a = \frac{11}{6}$ y $b = \frac{4}{3}$

4º Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

a/ Asíntotas.

A. Verticales

$x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{+}{- \cdot -} \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \frac{+}{+ \cdot -} \infty = -\infty$$

$x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{+}{+ \cdot -} \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{+}{+ \cdot +} \infty = +\infty$$

A. Horizontales

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1 \Rightarrow y = 1$$

No hay asíntotas oblicuas.

b/ Derivo

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

Veo los puntos críticos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-8x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow -8x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Estudio el signo de $f'(x)$

	-2		0		2	
$-8x$	+	+		−		−
$(x^2-4)^2$	+ +	+		+		+ +
$f'(x)$	+	+		−		−
	↗	↗		↘		↘

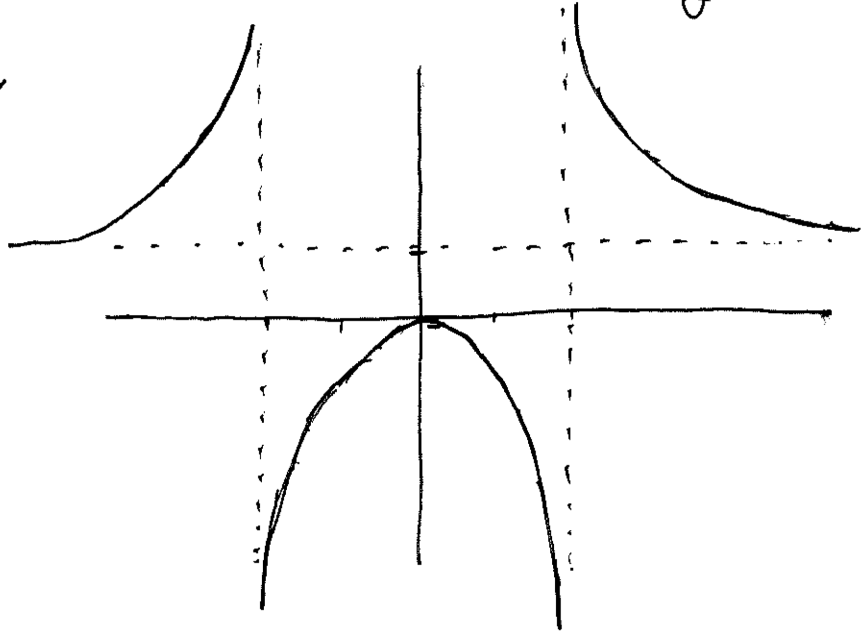
Por lo tanto

$f(x)$ crece $\forall x \in (-\infty, 0) - \{-2\}$

decrece $\forall x \in (0, \infty) - \{2\}$

máximo en $x=0 \Rightarrow y=0$

c/



5° $y = x^3 + ax^2 + bx + c$

pasa por $(-1,1) \Rightarrow -1 + a - b + c = 1 \Rightarrow a - b + c = 2$

pasa por $(2,-3) \Rightarrow 8 + 4a + 2b + c = -3 \Rightarrow 4a + 2b + c = -11$

punto de inflexión en $x = 2$

Calculo y''

$y' = 3x^2 + 2ax + b$

$y'' = 6x + 2a \Rightarrow$ si $x = 2$ $\quad y'' = 12 + 2a$

y tengo que $12 + 2a = 0 \Rightarrow a = -6$

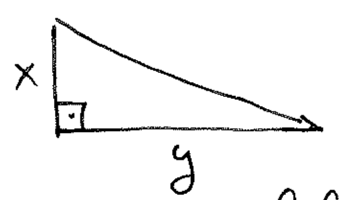
Resuelvo el sistema

$$\left.\begin{array}{l} a - b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = -11 \\ a = -6 \end{array}\right\} \underset{\text{resto}}{\Rightarrow} \begin{array}{r} -b + c = 8 \\ 2b + c = 13 \\ \hline 3b = 5 \end{array} \qquad b = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow c = 8 + \frac{5}{3} = \frac{24 + 5}{3} = \frac{29}{3}$$

Es decir

$$a = -6, \quad b = \frac{5}{3} \quad y \quad c = \frac{29}{3}$$

6° 

Llamo x e y a los catetos

El área va dada por la función

$A(x,y) = \frac{x \cdot y}{2}$. Sé que $x + y = 20$, por tanto $y = 20 - x$ y tengo $A(x) = \frac{x(20-x)}{2} = 10x - \frac{x^2}{2}$

Derivo

$A'(x) = 10 - \frac{2x}{2} = 10 - x$

Veo cuando $A'(x)$ vale cero

$$A'(x)=0 \Rightarrow 10-x=0 \Rightarrow x=10$$

Estudio el signo de $A'(x)$

	$x<10$	10	$x>10$
signo	$+$		$-$
	$\nearrow$		$\searrow$

y obtengo que el máximo se alcanza en $x=10$.

Calculo la hipotenusa por el teorema de Pitágoras

$$h^2=10^2+10^2 \Rightarrow h=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$$

Las dimensiones son 10, 10 y $10\sqrt{2}$.