EXAMEN 2º A MAT. APLIC. II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión 7-5-12

① $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$

a/ Derivo $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$

Sé que $x=1$ y $x=2$ deben ser ptos críticos

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=0 \Rightarrow 2a+b=-6 \\ f'(2)=0 \qquad 4a+b=-24 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=-9 \\ b=12 \end{array}$$

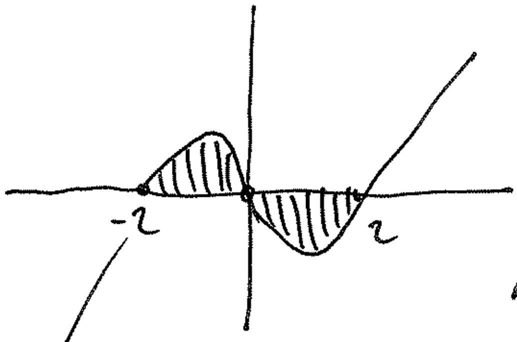
b/ $y = 2x^3 - 6$ $\quad y = 8x - 6.$

Resto las funciones y veo el área con el eje OX

$$y = 2x^3 - 6 - 8x + 6 = 2x^3 - 8x$$

ptos de corte con eje OX

$$2x^3 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x^2-4) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}$$



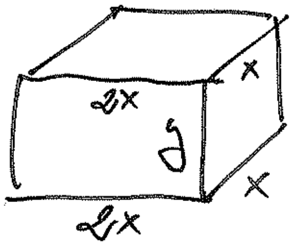
Usando la simetría, el área pedida es

$$A = 2 \cdot \int_{-2}^{0} 2x^3 - 8x \, dx =$$

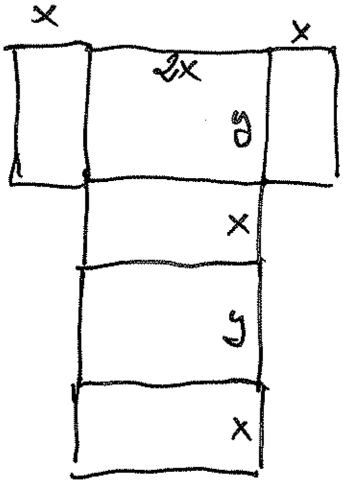
$$= 2\left(2\frac{x^4}{4} - \frac{8x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} \right) = x^4 - 8x^2 \Big|_{-2}^{0} = -\left((-2)^4 - 8(-2)^2\right)$$

$= 16 \ u^2$

2º



Sean x el ancho de la caja e y su altura



$$A(x,y) = 4xy + 4x^2 + 2xy =$$
$$= 6xy + 4x^2$$

Por otro lado sé que

$$V = 2x \cdot x \cdot y = 2x^2 y = 9000$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{9000}{2x^2} = \frac{4500}{x^2}$$

Tengo que $\quad A(x) = \dfrac{6x \cdot 4500}{x^2} + 4x^2 = \dfrac{27000}{x} + 4x^2$

Derivo $\quad A'(x) = -\dfrac{27000}{x^2} + 8x$

Veo ptos críticos $\quad A'(x) = 0 \Rightarrow 8x = \dfrac{27000}{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 = 3375 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3375} = 15$

Veo el signo

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \searrow & 15 & \nearrow \end{array}$$

y efectivamente es un mínimo.

Por tanto las dimensiones de la caja son

30 × 15 × 20 cm.

3º $\quad y = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$

Veo ptos de corte con el eje OX.

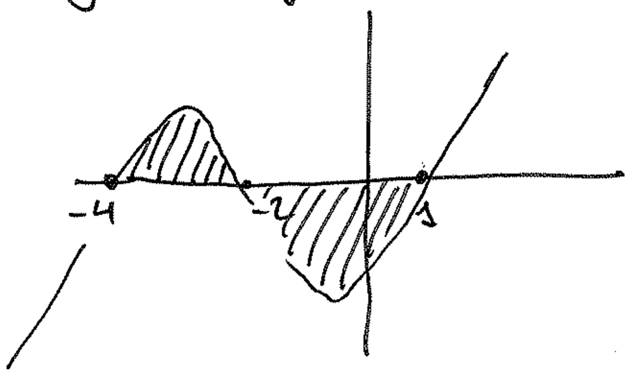
$$x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 5 & 2 & -8 \\ 1 & & 1 & 6 & 8 \\ \hline & 1 & 6 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases}$

y la función es:



El área pedida va dada por

$$A = \int_{-4}^{-2} x^3 + 5x^2 + 2x - 8 \, dx +$$

$$+ \left| \int_{-2}^{1} x^3 + 5x^2 + 2x - 8 \, dx \right| = \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 8x \Big|_{-4}^{2} +$$

$$+ \left| \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 8x \Big|_{-2}^{1} \right| = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12} \, u^2$$

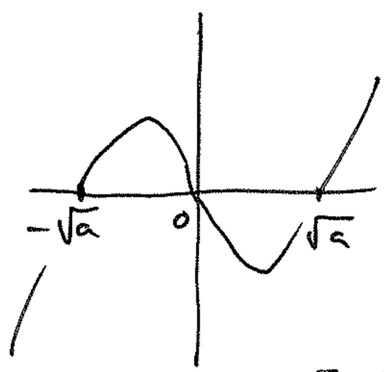
(4°) Resto las funciones

$$y = x^3 - ax$$

Veo pts de corte con OX

$$x^3 - ax = 0 \Rightarrow x(x^2 - a) = 0 \Rightarrow x = 0, \; x = \pm\sqrt{a}$$

Por tanto el dibujo es.



El Área será, por simetría:

$$A = 2 \cdot \int_{-\sqrt{a}}^{0} x^3 - ax \, dx =$$

$$= 2\left(\frac{x^4}{4} - \frac{ax^2}{2} \Big|_{\sqrt{a}}^{0} \right) = 2\left(-\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \right) \right) =$$

$$= 2\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$ como quiero que $A = 4$

$$\frac{a^2}{2} = 4 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = +\sqrt{8}$$

⑤ a/ $$\int \frac{3x}{x^2-8}\,dx = 3\int \frac{x}{x^2-8}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2-8}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\,\mathrm{Ln}\,|x^2-8| + K$$

b/ $$\int x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{x^2} + K$$

c/ $$\int \frac{2}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int (x+1)^{-1/2}\,dx = 2\cdot\frac{(x+1)^{1/2}}{1/2} + K$$

$$= 4\sqrt{x+1} + K$$

d/ $$\int \frac{x^2}{x-1}\,dx =$$ divido

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x-1 \\ \hline -x^2+x & x+1 \\ \hline x & \\ -x+1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$= \int x+1 + \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= x^2 + x + \mathrm{Ln}\,|x-1| + K$$