EXAMEN 2ºC MAT. APLIC. II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión 7-4-11

① a/ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4-2x+1}}{2x-3} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4-2x+1}}{2x-3}\cdot\dfrac{1/x}{1/x} =$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{\sqrt[3]{x^4-2x+1}}{x}}{\dfrac{2x-3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x^4-2x+1}{x^3}}}{2-\dfrac{3}{x}} =$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}}{2-\dfrac{3}{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{\infty}}{2} = \dfrac{\infty}{2} = \infty$

b/ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}}$

Resuelvo la inecuación $\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x} \geq 0$

NUM $x^2-2x+1=0$

$x = \dfrac{2\pm\sqrt{0}}{2} = 1$

DEN $x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0$

$\Rightarrow x=0,\ x=1,\ x=-1$

		-1		0		1	
NUM	+		+		+	1	+ +
DEN	−	-1	+	0	−	1	+ +
	−		+		−		+

Por tanto $\text{Dom} f(x) = (-1,0)\cup(1,\infty)$

② a/ $\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2+x-1}{x-1} - \dfrac{x^3}{1-x^2}\right) \to -\infty-\infty = -\infty$

b/ $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+1}{3+2x+2x^2-x^3} \to \dfrac{-2}{0} \Rightarrow$ El límite no existe. Veo los límites laterales, para lo cual factorizo el denominador.

	-1	2	2	3
3		-3	-3	-3
	-1	-1	-1	$\boxed{0}$

$3+2x+2x^2-x^3 = (x-3)(-x^2-x-1)$

Es decir.

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-4x+1}{(x-3)(-x^2-x-1)} = \frac{-}{-\cdot -}\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-4x+1}{(x-3)(-x^2-x-1)} = \frac{-}{+\cdot -}\infty = +\infty$$

3º a/ $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x+1}{x-3}\right)^{1-x} = \infty^{-\infty} = \frac{1}{\infty^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

b/ $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+3}{3x-1}\right)^{\frac{x^3-1}{1-x}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\infty} = \infty$$

4º $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} & \text{si } x<1 \\ 2ax+b & \text{si } x\in[1,2) \\ ax^2+x-b & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

En ningún pto divido por cero, puesto que $x=1$ está en "el segundo trozo".

Calculo a y b para que $f(x)$ sea continua en $x=1$ y $x=2$

En $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-2x+1}{x-1} \to \frac{0}{0} \text{ Indet.}$$

Factorizo

$$x^2-2x+1=0 \Rightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{0}}{2} = 1 \Rightarrow (x-1)^2$$

es decir $$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x-1 = 0$$

$$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2ax+b) = 2a+b$$

Por tanto $f(x)$ es continua en $x=1$ si

$2a+b=0$

En $x=2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2ax+b) = 4a+b$$

$$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (ax^2+x-b) = 4a-b+2$$

Por tanto $f(x)$ es continua en $x=2$ si

$$4a+b = 4a-b+2 \Rightarrow 2b=2 \Rightarrow b=1$$

Para que sea continua en $x=1$ y $x=2$ debe cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 2a+b=0 \\ b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow b=1 \text{ y } a=-\tfrac{1}{2}.$$ Para estos valores $f(x)$ es continua

(5°)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ K & \text{si } x=1 \end{cases}$$

Empiezo observando que nunca divido por cero, por tanto es continua en todo su dominio (es importante ver que $\text{Dom} f(x) = [0,\infty)$, ojo a la raíz), excepto en $x=1$, punto que estudio por separado.

Para que sea continua en $x=1$ debe cumplirse que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \to \frac{0}{0} \text{ Indet}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

Por tanto será continua en su dominio si

$$K = \frac{1}{2}$$

6°

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-2x}{3x^2-5x-2} & \text{si } x<2\\[2mm] \dfrac{2x-6}{2x^2-9x+9} & \text{si } x\geq 2\end{cases}$$

Para estudiar su continuidad veo primero si divido por cero y después lo que ocurre en $x=2$

División

$$3x^2-5x-2=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{5\pm 7}{6}=\begin{cases}2\\-1/3\end{cases}$$

Puesto que sólo $x=-1/3$ es menor que 2, en ese punto $f(x)$ no es continua

$$2x^2-9x+9=0 \Rightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{4}=\frac{9\pm 3}{4}=\begin{cases}3\\ \frac{3}{2}\end{cases}$$

Puesto que 3 es mayor que 2, en él la función no es continua.

Estudio $x=2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{4-2x}{3x^2-5x-2}\to\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{3(x-2)(x+1/3)}=\frac{-2}{3(2+1/3)}=\frac{-2}{7}$$

$$f(2)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x-6}{2x^2-9x+9}=\frac{-2}{-1}=+2$$

y veo que $f(x)$ no es continua en $x=2$

Concluyo:

$f(x)$ es continua $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1/3, 3, -2\}$