EXAMEN 2ºA MAT. APLIC. CCSS II

Soluciones (salvo error u omisión) 11-05-06

1º Por estar cada "trozo" de la función formado por polinomios la función es continua $\forall x \neq 1$.

Veo en $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -x^2+ax-1 = a-2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 3x-a = 3-a$$

$$f(1) = 3-a$$

Por ~~tanto~~

$a-2 = 3-a \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$. Para este valor la función es continua

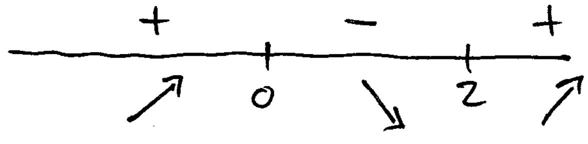
2º $f(x) = 3x^2(x-3) = 3x^3-9x^2$. [NOTA: $\mathrm{Dom}\, f(x) = \mathbb{R}$]

Derivo $f'(x) = 9x^2-18x$

Veo ptos críticos.

$f'(x)=0 \Rightarrow 9x^2-18x=0 \Rightarrow x(9x-18)=0 \Rightarrow$ $x=0$; $9x-18=0 \Rightarrow x=2$

Veo signo de $f'(x)$



$f(x)$ crece $\forall x \in (-\infty,0)\cup(2,\infty)$

decrece $\forall x \in (0,2)$

máximo en $x=0 \Rightarrow y=0$

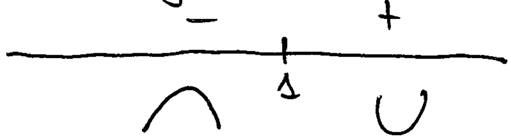
mínimo en $x=2 \Rightarrow y=-12$

Calculo $f''(x)$

$f''(x) = 18x - 18$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 18x - 18 = 0 \Rightarrow x = 1$

Veo signo de $f''(x)$

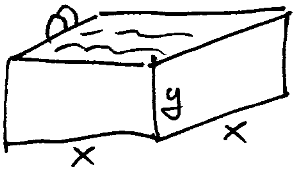


$f(x)$ es convexa $(\cap)$ $\forall x \in (-\infty, 1)$

concava $(\cup)$ $\forall x \in (1, \infty)$

pto inflexión $x = 1 \Rightarrow y = -6$

(3º)



Llamo x al lado del fondo e y a la altura

El fondo tiene por área x^2 y cada lado $x \cdot y$, por ~~tanto~~ el área va dada por

$$f(x,y) = x^2 + 4x \cdot y$$

Como sé que el volumen es 32

$$V = x^2 \cdot y = 32 \Rightarrow y = \frac{32}{x^2}$$

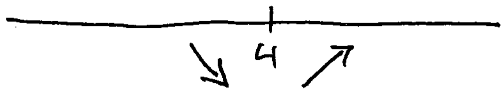
Por ~~tanto~~

$$f(y) = x^2 + \frac{4 \cdot 32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x} = \frac{x^3 + 128}{x}$$

Derivo $f'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot x - (x^3 + 128)}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 128}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 128 = 0 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$

Veo el signo de $f'(x)$



$\Rightarrow$ en $x = 4$ hay un mínimo.

$x = 4 \Rightarrow y = \frac{32}{16} = 2$

Las dimensiones deben ser ancho y fondo 4 m y alto 2 m.

(2)

4°) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ K & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Veo:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \frac{0}{0} \quad \text{factorizo}$$

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{x-2}} = 3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = K$$

Por tanto para que sea continua en $x=2$ K debe valer 3.

5°) $f(x) = \dfrac{3x^2-9x+3}{3x-1}$

$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1/3\}$

Derivo

$$f'(x) = \frac{(6x-9)(3x-1)-(3x^2-9x+3)\cdot 3}{(3x-1)^2} =$$

$$= \frac{18x^2-6x-\cancel{27x}+\cancel{9}-9x^2+\cancel{27x}-\cancel{9}}{(3x-1)^2} = \frac{9x^2-6x}{(3x-1)^2}$$

Veo ptos críticos

$f'(x)=0 \Rightarrow 9x^2-6x=0 \Rightarrow x(9x-6)=0$ $\quad x=0$; $9x-6=0 \Rightarrow x=2/3$

Veo signo de $f'(x)$

		0		$1/3$		$2/3$	
NUM	+		−		−		+
DEN	+		+		+		+
$f'(x)$	+		−		−		+
	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

por tanto $f(x)$ crece $\forall x \in (-\infty,0) \cup (\frac{2}{3},\infty)$

decrece $\forall x \in (0, 2/3) - \{1/3\}$

máximo en $x = 0$

mínimo en $x = 2/3$

⑥ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{4-x^2}$

Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

Derivo

$$f'(x) = \frac{2x(4-x^2)-(x^2-1)\cdot(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{8x-\cancel{2x^3}+\cancel{2x^3}-2x}{(4-x^2)^2} = \frac{6x}{(4-x^2)^2}$$

Veo ptos críticos

$f'(x)=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0.$

Veo signo

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
NUM	$-$	$-$	$+$	$+$
DEN	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
	↘	↘	↗	↗

Por tanto $f(x)$ crece $\forall x \in (0,\infty)-\{2\}$

decrece $\forall x \in (-\infty,0)-\{2\}$

mínimo en $x=0 \Rightarrow y=-1/4$

⑦ $f(x) = \begin{cases} x^2+3x+m & \text{si } x \le -1 \\ x^2 - mx & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Derivo

$f'(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \le -1 \\ 2x - m & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Para que $f(x)$ sea derivable la función debe ser continua y la derivada también

$f(x)$ continua

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(1) = 1-3+m = -2+m \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1+n\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -2+m = 1+n \\ m-n = +3\end{array}$$

$f'(x)$ continua

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f'(x) = f'(1) = -2+3 = 1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = -2-n\end{array}\right\} \Rightarrow 1 = -2-n \Rightarrow n = +3$$

Por ~~tanto~~ $\left.\begin{array}{l} m-n=+3 \\ n=+3\end{array}\right\} \Rightarrow m-3=-3 \Rightarrow m=-6$

es decir $m=-6$ y $n=+3$

(8°) $f(x) = \dfrac{4x}{(x+2)^2}$ $\qquad$ Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-2\}$

Simetría

Veo par : $f(x) = f(-x)$

$$f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x+2)^2} = \frac{-4x}{(-x+2)^2} \neq f(x) \Rightarrow \text{no hay par}$$

Veo impar : $f(x) = -f(-x)$

$$-f(-x) = -\left(\frac{-4x}{(-x+2)^2}\right) = \frac{4x}{(-x+2)^2} \neq f(x) \Rightarrow \text{no hay impar}$$

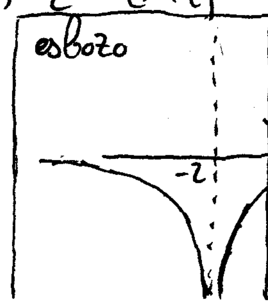
Asíntotas

- Verticales $x = -2$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{4x}{(x+2)^2} = -\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} \frac{4x}{(x+2)^2} = -\infty$$

- Horizontales

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{4x}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow y = 0$$



(esto valdría, aunque no es realmente el dibujo)