RECUPERACIÓN 2º A MAT. APLIC. CC.SS. II
3ª EVALUACIÓN 18-05-06

SOLUCIONES (Salvo error u omisión)

Ejercicio nº 1.-

- Continuidad:

  – Si $x \neq 1$:

  $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

  – En $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(3x^2 - ax + b\right) = 3 - a + b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(ax^3 - bx + 2\right) = a - b + 2 \\ f(1) = a - b + 2 \end{cases}$$

  Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser $3 - a + b = a - b + 2$; es decir, $2a - 2b = 1$.

- Derivabilidad:

  – Si $x \neq 1$: $f(x)$ es derivable, y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 6x - a & \text{si} \quad x < 1 \\ 3ax^2 - b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

  – En $x = 1$: Para que sea derivable en $x = 1$, las derivadas laterales han de ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 6 - a \\ f'(1^+) = 3a - b \end{array}\right\} \; 6 - a = 3a - b$$

- Uniendo las dos condiciones anteriores, $f(x)$ será derivable si:

$$\left.\begin{array}{l} 2a - 2b = 1 \\ 6 - a = 3a - b \end{array}\right\} \; a = \frac{11}{6}; \quad b = \frac{4}{3}$$

Ejercicio nº 2.-

a) $f'(t) = \dfrac{-10 \cdot 2(t-6)}{[(t-6)^2 + 1]^2} = \dfrac{-20(t-6)}{[(t-6)^2 + 1]^2}$

$f'(t) = 0 \;\rightarrow\; t - 6 = 0 \;\rightarrow\; t = 6$

Signo de $f'(t)$:

$$\begin{array}{ccccc} & f' > 0 & & f' < 0 & \\ 0 & \nearrow & 6 & \searrow & 12 \end{array}$$

Como $f'(t) > 0$ para $t \in (0, 6)$ y $f'(t) < 0$ para $t \in (6, 12)$, en $t = 6$ hay un máximo.

$f(0) \approx 0{,}27$; $f(6) = 10$; $f(12) \approx 0{,}27$

Por tanto, la máxima cantidad de agua se obtuvo en el 6º mes, es decir, en junio.

b) $f(6) = 10 \;\rightarrow\;$ 10 millones de litros

Ejercicio nº 3.-

$$f'(x) = \frac{(6x-9)(3x-1) - (3x^2 - 9x + 3)3}{(3x-1)^2} = \frac{18x^2 - 6x - 27x + 9 - 9x^2 + 27x - 9}{(3x-1)^2} =$$

$$= \frac{9x^2 - 6x}{(3x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 9x^2 - 6x = 0 \;\rightarrow\; 3x(3x-2) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} 3x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \\ 3x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{ccccc} f' > 0 & & f' < 0 & & f' > 0 \\ \nearrow & 0 & \searrow & \frac{2}{3} & \nearrow \end{array}$$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$; es decreciente en $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$. Tiene un máximo en $(0, -3)$ y un mínimo en $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-5}{3}\right)$.

Ejercicio nº 5.-

a) $f'(x) = 6x^2 + 18x + 12$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 6(x^2 + 3x + 2) = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

- Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{ccccc} f' > 0 & & f' < 0 & & f' > 0 \\ \nearrow & -2 & \searrow & -1 & \nearrow \end{array}$$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$; es decreciente en $(-2, -1)$. Tiene un máximo en $(-2, -3)$ y un mínimo en $(-1, -4)$.

b) $f''(x) = 12x + 18$

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 12x + 18 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-18}{12} = \frac{-3}{2}$$

- Signo de $f''(x)$:

$$\begin{array}{ccc} f''<0 & & f''>0 \\ \hline \frown & \frac{-3}{2} & \smile \end{array}$$

$f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, \frac{-3}{2}\right)$; es cóncava en $\left(\frac{-3}{2}, +\infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-7}{2}\right)$.

Ejercicio nº 6.-

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para un nivel de confianza del 95%, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}95 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Además, sabemos que $\sigma = \sqrt{144} = 12$ cm y que $E = 2$ cm.

Sustituimos en la expresión anterior y despejamos n:

$$2 = 1{,}96 \cdot \frac{12}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{n} = \frac{1{,}96 \cdot 12}{2} = 11{,}76 \quad \rightarrow \quad n = 138{,}2976$$

El tamaño de la muestra ha de ser de, al menos, 139 individuos.

Ejercicio nº 7.-

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para un nivel de confianza del 90%, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}9 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 1{,}645$

Además, sabemos que $\sigma = 0{,}5$ años y que $E = 0{,}25$.

Sustituimos en la expresión anterior y despejamos n:

$$0{,}25 = 1{,}645 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{n} = \frac{1{,}645 \cdot 0{,}5}{0{,}25} = 3{,}29 \quad \rightarrow \quad n = 10{,}8241$$

Habrá que tomar una muestra de, al menos, 11 lavavajillas.

Ejercicio nº 8.-

a) Como el tamaño de la muestra es $n = 100$ ($n \geq 30$), por el teorema central del límite, sabemos que las medias muestrales, $\bar{x}$, se distribuyen según una normal de media

$\mu = 17{,}2$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}3}{\sqrt{100}} = \frac{2{,}3}{10} = 0{,}23$. Por tanto, si z es $N(0, 1)$:

$$P[16{,}7 < \bar{x} < 17{,}5] = P\left[\frac{16{,}7 - 17{,}2}{0{,}23} < z < \frac{17{,}5 - 17{,}2}{0{,}23}\right] = P[-2{,}17 < z < 1{,}30] =$$

$$= P[z < 1{,}30] - P[z < -2{,}17] = P[z < 1{,}30] - P[z > 2{,}17] = P[z < 1{,}30] - (1 - P[z \leq 2{,}17]) =$$

$$= 0{,}9032 - (1 - 0{,}9850) = 0{,}8882$$

La probabilidad pedida es de 0,8882.

b) Ya hemos hallado, en el apartado anterior, que las medias muestrales, $\bar{x}$, se distribuyen $N\,(17{,}2;\ 0{,}23)$.