REPESCA **2º A** **MAT. APLIC. CC.SS. II**
1ª EVALUACIÓN **22-05-06**

SOLUCIONES (Salvo error u omisión)

Ejercicio nº 1.-

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 4 \\ a & 2 & 6 \\ 4 & 2a & 10 \end{vmatrix} = -2a^2 + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \pm 2$$

- Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$ $\rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

  - Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 10 & 2 \end{array}\right)$$

Observamos que la 3ª ecuación es la suma de las dos anteriores

y que $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$

Por tanto, $ran\,(A) = ran\,(A') = 2 <$ *nº incógnitas*. El sistema sería compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y + 4z = 2 \\ 2z + 2y + 6z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 \end{array}$$

- Si $a = -2$, quedaría:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & -4 & 10 & -2 \end{array}\right)$$

En este caso, como $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -20 \neq 0, \quad ran\,(A) = 2.$

Además, $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ -4 & 10 & -2 \end{vmatrix} = 128 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A') = 3$

Como $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$, el sistema sería incompatible.

Ejercicio nº 2.-

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = -a^2 - a - 2 \neq 0 \quad \text{para cualquier valor de } a.$$

Por tanto, $ran\ (A) = ran\ (A') = n^{\underline{o}}\ incógnitas = 3$. El sistema es compatible determinado. Para cada valor de a, tenemos un sistema diferente, todos ellos tienen solución única. Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad |A| = -a^2 - a - 2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-a^2 - a - 2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-a^2 - a - 2} = 0; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 - a - 2} = 0$$

Cada uno de los sistemas que obtenemos, para cada valor distinto de a, tiene como solución única (1, 0, 0).

Ejercicio nº 3.-

a) Si llamamos x al número de discos, y al número de libros y z al número de carpetas, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ 20x + 15y + 5z &= 150 \\ x + z &= 3y \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ 4x + 3y + z &= 30 \\ x - 3y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

b) solvemos el sistema aplicando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 4 & 3 & 1 & 30 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 4 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & -18 \\ 0 & -4 & 0 & -12 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \cdot (-1) \\ \frac{-1}{4} \cdot 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ y + 3z &= 18 \\ y &= 3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & y = 3 \\ & z = \frac{18 - y}{3} = \frac{18 - 3}{3} = 5 \\ & x = 12 - y - z = 12 - 3 - 5 = 4 \end{aligned}$$

Por tanto, ha comprado 4 discos, 3 libros y 5 carpetas.

Ejercicio nº 4.-

- Utilizando determinantes:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A| \neq 0$.
Calculamos $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda + 4 + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 6$$

Por tanto, existe A^{-1} si $\lambda = 6$.

b) Para $\lambda = 0$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 6$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Por método de Gauss:

a) Estudiamos el rango de A:

$$\begin{array}{c} 1^a \\ 3^a \\ 2^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - \lambda \cdot 1^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ -3 \cdot 3^a + \lambda \cdot 2^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = 6$, $ran(A) = 2 \rightarrow$ No existe A^{-1}

Si $\lambda \neq 6$, $ran(A) = 3 \rightarrow$ Existe A^{-1}

b) Para $\lambda = 0$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 3^a \\ 2^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 3\cdot 1^a + 2^a \\ 2^a + 3^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} -2\cdot 1^a + 3\cdot 3^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 5.-

Apartado a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix} = -a^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \left[-a^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = a^4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

$$A^{33} = A^{4\cdot 8+1} = \left(A^4\right)^8 \cdot A = \left[a^4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^8 \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a^{32}\cdot I \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^{33} \\ -a^{33} & 0 \end{pmatrix}$$

Apartado b)

- Utilizando determinantes:

Calculamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a^2 - 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - \left(a^2 - 1\right) = a^2 - a^2 + 1 = 1 \neq 0 \quad \text{para cualquier valor de } a$$

Por tanto, como $|A| \neq 0$, existe A^{-1} para todo a.

Hallamos A^{-1}:

$$Adj\,(A) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1-a^2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \left(Adj\,(A)\right)^t = \begin{pmatrix} a & 1-a^2 \\ -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(Adj\,(A)\right)^{t} = \begin{pmatrix} a & 1-a^{2} \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

- Por método de Gauss:

Estudiamos el rango de A:

$$\begin{pmatrix} a & a^{2}-1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{a} \\ a\cdot 2^{a}-1^{a} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A)=2 \text{ para cualquier valor de } a.$$

Por tanto, existe A^{-1} para todo a.

Hallamos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & a^{2}-1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \\ -a\cdot 2^{a}+1^{a} \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc} a & a^{2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -a \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a}+\left(a^{2}-1\right)2^{a} \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & a^{2} & -a\left(a^{2}-1\right) \\ 0 & -1 & 1 & -a \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \frac{1}{a}1^{a} \\ -2^{a} \end{array}\begin{pmatrix} a & -\left(a^{2}-1\right) \\ -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} a & 1-a^{2} \\ -1 & a \end{pmatrix}$$