EXAMEN **2º A** **MAT. APLIC. CC.SS. II**

4-05-06

SOLUCIONES (Salvo error u omisión)

Ejercicio nº 1.-

a) Por el teorema central del límite, sabemos que las medias muestrales siguen una distribución normal de media $\mu = 50$ horas y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

Es decir, se distribuyen N (50; 1,25). Por tanto, si z es N (0, 1), tenemos que:

$$P[\bar{x} < 48] = P\left[z < \frac{48-50}{1{,}25}\right] = P[z < -1{,}6] = P[z > 1{,}6] = 1 - P[z \le 1{,}6] = 1 - 0{,}9452 = 0{,}0548$$

La probabilidad pedida es de 0,0548.

b) Ya hemos averiguado en el apartado anterior que se distribuyen N (50; 1,25).

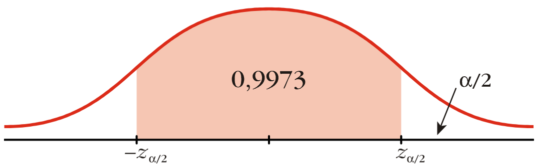
Ejercicio nº 2.-

Por el teorema central del límite, sabemos que las medias muestrales se distribuyen $N\left(67; \frac{20}{\sqrt{15}}\right)$.

El intervalo característico es de la forma:

$$\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Para el 99,73%, tenemos que:



$$1-\alpha = 0{,}9973 \ \rightarrow\ \frac{\alpha}{2} = 0{,}00135 \ \rightarrow\ P[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}9973 + 0{,}00135 = 0{,}99865 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ z_{\alpha/2} = 3$$

Así, el intervalo será:

$$\left(67 - 3 \cdot \frac{20}{\sqrt{15}};\ 67 + 3 \cdot \frac{20}{\sqrt{15}}\right);\ \text{es decir:}$$

(51,51; 82,49)

Por tanto, en el 99,73% de las muestras, las medias están comprendidas entre 51,51 y 82,49 puntos.

Ejercicio nº 3.-

Queremos estimar la media de la población, μ, mediante una muestra de tamaño 200, con un nivel de significación del 5% (esto es, con un nivel de confianza del 95%). El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Para $\alpha = 0{,}05$, tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Por tanto, el intervalo será:

$$\left(8 - 1{,}96 \cdot \frac{6}{\sqrt{200}};\ 8 + 1{,}96 \cdot \frac{6}{\sqrt{200}}\right); \text{ es decir, } (7{,}17;\ 8{,}83).$$

Tenemos la confianza del 95% de que la media de la población está comprendido entre 7,17 y 8,83.

Ejercicio nº 4.-

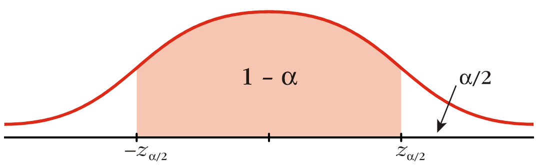
La expresión que nos da el error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Sabemos que $E = \dfrac{174 - 170}{2} = 2 \text{ cm} = 0{,}02 \text{ m}$

Como no conocemos σ, tomamos $s = 0{,}4$ m. Y sabemos que $n = 1\,000$.

Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos que:

$$0{,}02 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{1\,000}} \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = \frac{0{,}02 \cdot \sqrt{1\,000}}{0{,}4} = 1{,}58$$



$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9429 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0{,}1142 \quad \rightarrow \quad 1 - \alpha = 0{,}8858$$

El nivel de confianza es del 88,58%.

Ejercicio nº 5.-

a) La distribución de la proporción de billetes premiados, pr, en muestras de 46 billetes, es una normal de media $p = 0{,}11$ y de desviación típica $\sqrt{\dfrac{pq}{n}} = \sqrt{\dfrac{0{,}11 \cdot 0{,}89}{46}} = 0{,}046.$

Es decir , pr es $N\,(0{,}11;\ 0{,}046)$.

b) En una $B\,(46;\ 0{,}11)$ tenemos que calcular $P\,[x > 6]$. Como $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, podemos aproximar por una normal de media $\mu = np = 5{,}06$ y de desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{46 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}89} = 2{,}12.$$

x es $B\,(46;\ 0{,}11)$ $\rightarrow$ x' es $N\,(5{,}06;\ 2{,}12)$ $\rightarrow$ z es $N\,(0,\ 1)$, entonces:

$$P[x > 6] = P[x' \geq 6{,}5] = P\left[z \geq \frac{6{,}5 - 5{,}06}{2{,}12}\right] = P[z \geq 0{,}68] = 1 - P[z < 0{,}68] = 1 - 0{,}7518 =$$
$$= 0{,}2482$$

La probabilidad pedida es de 0,2482.

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

La proporción de aprobados en matemáticas, en muestras de 30 alumnos, se distribuye según una normal de media $p = \dfrac{560}{800} = 0{,}7$ y de desviación típica $\sqrt{\dfrac{pq}{n}} = \sqrt{\dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{30}} = 0{,}084$.

Una probabilidad del 99% significa $1 - \alpha = 0{,}99$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

El intervalo característico será:

$(0{,}7 - 2{,}575 \cdot 0{,}084;\ \ 0{,}7 + 2{,}575 \cdot 0{,}084)$; es decir:

$(0{,}48;\ 0{,}92)$

Esto significa que, en el 99% de las muestras de 30 alumnos, la proporción de aprobados en matemáticas está entre 0,48 y 0,92.

<u>Ejercicio nº 7.-</u>

Queremos estimar la proporción en la población, p, mediante una muestra de tamaño 150, con un nivel de confianza del 90%.

El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1 - pr)}{n}};\ \ pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1 - pr)}{n}}\right)$$

Para un nivel de confianza del 90%, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}9$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

El valor de pr es el de la proporción obtenida en la muestra:

$$pr = \frac{25}{150} = 0{,}17$$

Por tanto, el intervalo con confianza será:

$$\left(0{,}17 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}17 \cdot 0{,}83}{150}};\ \ 0{,}17 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}17 \cdot 0{,}83}{150}}\right);\ \text{ es decir:}$$

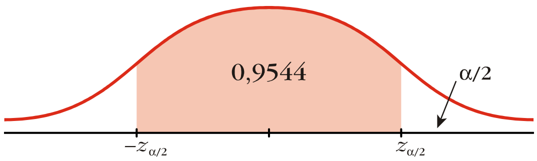
$(0{,}12;\ 0{,}22)$

Esto significa que tenemos una confianza del 90% de que la proporción en la población está comprendida entre 0,12 y 0,22.

Ejercicio nº 8.-

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pr\,(1-pr)}{n}}$.

Para un nivel de confianza del 95,44%, tenemos que:



$$1-\alpha = 0{,}9544 \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = 0{,}0228$$

$$P\,[z \le z_{\alpha/2}] = 1 - 0{,}0228 = 0{,}9772 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 2$$

El error máximo que admitimos es $E = 0{,}02$.

Para pr tomaremos el valor anterior: $pr = 0{,}15$.

Así, si sustituimos en la expresión anterior, tenemos que:

$$0{,}02 = 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{n}} \quad \rightarrow \quad \frac{0{,}02}{2} = \frac{\sqrt{0{,}15 \cdot 0{,}85}}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{n} = \frac{\sqrt{0{,}15 \cdot 0{,}85} \cdot 2}{0{,}02} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{n} = 35{,}707 \quad \rightarrow \quad n = 1\,275$$

Deberemos seleccionar una muestra de, al menos, 1275 habitantes.