EXAMEN FINAL JUNIO **2º A** **MAT. APLIC. CC.SS. II** **23-05-06**

SOLUCIONES (salvo error u omisión)

Ejercicio nº 1.-

a) Para que exista A^{-1} es necesario y suficiente que $|A| \neq 0$. Calculamos $|A|$:

$|A| = 1 \neq 0$ para todo x.

Por tanto, existe A^{-1} cualquiera que sea el valor de x.

b) Para $x = 2$, queda:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 1$$

Hallamos A^{-1} en este caso:

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Ejercicio nº 2.-

Estudiando el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 2a - 2a - (a+1) = -(a+1) = 0 \rightarrow a = -1$$

- Si $a \neq -1 \rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 3$. El sistema es compatible determinado. Para cada valor de $a \neq -1$, tenemos un sistema con solución única:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = \frac{-a-1}{-a-1} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a+1 & a+3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 0 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a+1 & 2 & a+3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = \frac{-2(a+1)}{-(a+1)} = 2$$

Para cada valor de $a \neq 1$, tenemos un sistema diferente.
Cada uno de los sistemas tiene solución única:

$x = 1,\ y = 0,\ z = 2$

- Si $a = -1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, entonces $ran(A) = 2$.

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Las dos últimas filas son iguales, luego $ran\,(A') = 2$.
Como $ran\,(A) = ran\,(A')$ < *nº incógnitas*, en este caso el sistema sería compatible indeterminado.
Prescindimos de la 3ª ecuación, pues es idéntica a la 2ª, pasamos z al 2º miembro y resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} -x + y &= -1 \\ 2y &= 2 - z \end{aligned}\right\} \quad \text{Hacemos } z = \lambda \quad \rightarrow \quad y = \frac{2-\lambda}{2} = 1 - \frac{1}{2}\lambda$$

$$x = y + 1 = 1 - \frac{1}{2}\lambda + 1 = 2 - \frac{1}{2}\lambda$$

Las soluciones del sistema son:

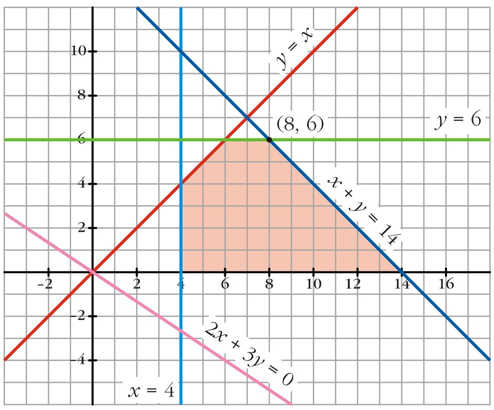
$$x = 2 - \frac{1}{2}\lambda;\; y = 1 - \frac{1}{2}\lambda;\; z = \lambda \text{ , con } \lambda \in \mathbf{R}$$

Ejercicio nº 3.-

- Representamos las rectas $\begin{cases} x = 4;\; y = 6 \\ y = x \\ x + y = 14 \\ y = 0 \end{cases}$

  y hallamos la región que cumple las restricciones del problema.

- Representamos la dirección de las rectas $z = 2x + 3y$, dibujando la que pasa por el origen de coordenadas: $2x + 3y = 0$:



- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas $\left.\begin{array}{l} y=6 \\ x+y=14 \end{array}\right\}$, es decir, en (8, 6), y vale:

  $f(8, 6) = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 = 16 + 18 = 34$

Ejercicio nº 4.-

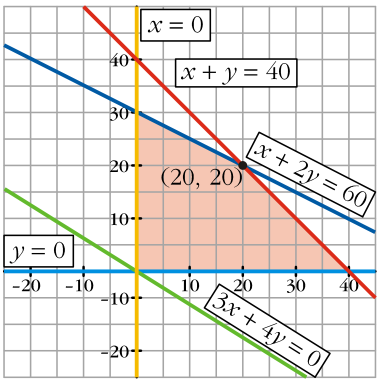
Llamamos x al nº de neveras utilitarias e y al nº de neveras de lujo. Resumimos los datos en una tabla:

	FABRICAN	MONTAJE	ACABADO	BENEFICIO
UTILITARIA	x	$3x$	$3x$	$300x$
LUJO	y	$3y$	$6y$	$400y$
TOTAL		$3x + 3y$	$3x + 6y$	$300x + 400y$

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 3x+3y \le 120 & \rightarrow \quad x+y \le 40 \\ 3x+6y \le 180 & \rightarrow \quad x+2y \le 60 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

La función que nos da el beneficio es $z = 300x + 400y = 100(3x + 4y)$. Debemos obtener el máximo de esta función, sujeta a las restricciones anteriores.



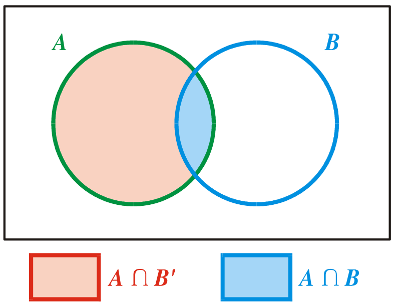
Dibujamos el recinto correspondiente a las restricciones y la recta $100(3x + 4y) = 0 \quad \rightarrow$
$3x + 4y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 300x + 400y$:

El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas: $\left.\begin{array}{r} x+y=40 \\ x+2y=60 \end{array}\right\}$;

es decir, en (20, 20).

Por tanto, deben fabricarse 20 neveras de cada uno de los dos tipos. El beneficio será
$z = 300 \cdot 20 + 400 \cdot 20 = 14\,000$ euros.

Ejercicio nº 5.-



$P[A] = P[A \cap B'] + P[A \cap B] = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$

$P[B] = 1 - P[B'] = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}7 + 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}8$

Ejercicio nº 6.-

- Hacemos un diagrama en árbol:

$$\begin{array}{lllll} & & \xrightarrow{1/2} & \text{Par} \rightarrow P[\text{I y Par}] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ \xrightarrow{1/2} & \text{I} & & \\ & & \xrightarrow{1/2} & \text{Impar} \\ & & \xrightarrow{1/3} & \text{Par} \rightarrow P[\text{II y Par}] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ \xrightarrow{1/2} & \text{II} & & \\ & & \xrightarrow{2/3} & \text{Impar} \end{array}$$

a) $P[\text{Par}] = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

b) $P[\text{I/Par}] = \frac{P[\text{I y Par}]}{P[\text{Par}]} = \frac{1/4}{5/12} = \frac{3}{5}$

Ejercicio nº 7.-

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para una probabilidad de 0,99 (es decir, un nivel de confianza del 99%), tenemos que $z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

Además, sabemos que $\sigma = \sqrt{9} = 3$ y que $E = 1$kg.

Sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos el valor de n:

$$1 = 2{,}575 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{n} = 2{,}575 \cdot 3 = 7{,}725 \quad \rightarrow \quad n \approx 59{,}68$$

Habrá que tomar una muestra de al menos, 60 individuos.

Ejercicio nº 8.-

Queremos estimar la proporción en la población, p, mediante una muestra de tamaño 1000.

El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}};\ pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}} \right)$$

Para el 90% de confianza tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}645$. El valor de pr es el de la proporción obtenida en la muestra:

$$pr = \frac{10}{1\,000} = 0{,}01$$

Por tanto, el intervalo de confianza será:

$$\left(0{,}01-1{,}645\cdot\sqrt{\frac{0{,}01\cdot 0{,}99}{1\,000}};\ \ 0{,}01+1{,}645\cdot\sqrt{\frac{0{,}01\cdot 0{,}99}{1\,000}}\right),\ \text{es decir:}\ \ (0{,}0048;\ 0{,}0152)$$

Ejercicio nº 9.-

- *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-2,\ 2\}$

- *Simetrías:*

$$f(-x)=\frac{x^2+1}{4-x^2}=f(x).\ \text{Es par:}\ \ \text{simétrica respecto al eje}\ \ Y$$

- *Asíntotas verticales:*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\ x=-2\ \ \text{es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\}\ x=2\ \ \text{es asíntota vertical}$$

- *Asíntota horizontal:*

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} f(x)=-1\ \ \to\ \ y=-1\ \text{es asíntota horizontal}$$

Si $x\to -\infty$ y si $x\to +\infty$, f (x) < –1 $\to$ la curva está por debajo de la asíntota.

- *Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:*

$$f'(x)=\frac{2x(4-x^2)-(x^2+1)\cdot(-2x)}{(4-x^2)^2}=\frac{8x-2x^3+2x^3+2x}{(4-x^2)^2}=\frac{10x}{(4-x^2)^2}$$

$$f'(x)=0\ \ \to\ \ 10x=0\ \ \to\ \ x=0$$

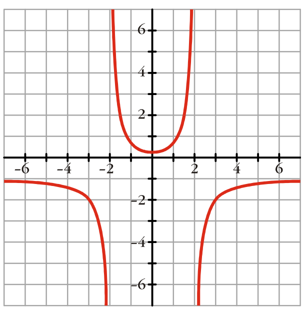
Signo de $f'(x)$:

$f'<0$		$f'<0$		$f'>0$		$f'>0$
$\searrow$	-2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$; es creciente en $(0,2)\cup(2,+\infty)$.

Tiene un mínimo en $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$.

- *Gráfica*:



Ejercicio nº 10.-

- Continuidad:

  – Si $x \neq 1$: $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

  – En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(2x^2 + ax\right) = 2 + a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(bx^2 + 2x - 1\right) = b + 1 \\ f(1) = 2 + a \end{array}\right\}$$

  Para que sea continua, ha de ser $2 + a = b + 1$, es decir: $a = b - 1$

- Derivabilidad:

  – Si $x \neq 1$: $f(x)$ es derivable, y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + a & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx + 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

  – En $x = 1$: Para que sea derivable, debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(1^-\right) = 4 + a \\ f'\left(1^+\right) = 2b + 2 \end{array}\right\} \quad 4 + a = 2b + 2 \quad \rightarrow \quad a = 2b - 2$$

- Uniendo las dos condiciones anteriores, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} a = b - 1 \\ a = 2b - 2 \end{array}\right\} \quad b - 1 = 2b - 2 \quad \rightarrow \quad b = 1 \quad \rightarrow \quad a = 0$$