EXAMEN 2ºA MAT. APLIC II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión 24-4-09

(1º) a/ $(g\circ f)(x) = g(x^3) = 2x^3+1$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^3 = (2x+1)(2x+1)^2 =$

$= (2x+1)(4x^2+4x+1) = 8x^3+8x^2+2x+4x^2+4x+1 =$

$= 8x^3+12x^2+6x+1$

b/ $y = e^{\frac{x+1}{x}}$ Despejo x

$\frac{x+1}{x} = \ln y \Rightarrow x+1 = x\ln y \Rightarrow$

$\Rightarrow x - x\ln y = -1 \Rightarrow x(1-\ln y) = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-1}{1-\ln y} = \frac{1}{\ln y - 1}$ y cambiando x por y tengo

$f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$

(2º) a/ $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2-1}-x} \to \frac{2}{\infty-\infty}$ Indet.

multiplico y divido por el conjugado.

$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2-1}-x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot(\sqrt{x^2-1}+x)}{x^2-1-x^2} =$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{2(\sqrt{x^2-1}+x)}{-1} = \lim_{x\to\infty} -2(\sqrt{x^2-1}+x) = -\infty$

b/ $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-2x^2-9x+18}{x^2+x-6} \to \frac{0}{0}$ Indet.

factorizo

$x^3-2x^2-9x+18 = (x-2)(x^2-9)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -9 & 18 \\ 2 & & 2 & 0 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 \end{array}$$

$x^2+x-6=0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -3 \end{matrix}$

$(x-2)(x+3)$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2-9)}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \frac{-5}{5} = -1$

3°
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \leq 3 \\ 2x+4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La función es continua para $x>3$ por ser un polinomio y, puesto que en $\frac{x^2-9}{x-3}$ sólo se divide por cero si $x=3$, también lo es si $x<3$.

Veo si es continua en $x=3$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = 6$

$f(3) = \frac{0}{0}$ no existe

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 2x+4 = 10$

puesto que $\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$ la función no es continua en $x=3$.

Es decir

$f(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$

4º $f(x) = x^2 + 3x - 1$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 3(x+h) - 1 - (x^2+3x-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{3x} + 3h \cancel{-1} \cancel{-x^2} \cancel{-3x} \cancel{+1}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 + 3h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h+3)}{\cancel{h}} = 2x+3$$

La recta $y = 5x+1$ tiene por pendiente 5, por tanto busco un punto de $f(x)$ en el cual la pendiente de la recta tangente sea 5. Es decir

$f'(x) = 5 \Rightarrow 2x + 3 = 5 \Rightarrow x = 1$

Si $x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 1^2 + 3 - 1 = 3$ $(1,3)$ es el pto

y la ecuación de la recta pedida es

$$y - 3 = 5(x-1)$$

5º a/ $y = \operatorname{sen}^2(x^3 - x)$

$y' = 2\operatorname{sen}(x^3-x) \cdot \cos(x^3-x)\,(3x^2-1)$

b/ $y = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x}}$ (la hago directamente, pero habría

$y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \cdot \frac{x-(x+1)}{x^2}$ formas mejores)

c/ $y = 2^{\cos^2 x}$

$y' = 2^{\cos^2 x} \cdot \ln 2 \cdot 2\cos x \cdot (-\operatorname{sen} x)$

d/ $y = e^{-x^2}(2x+3)^2$

$$y' = e^{-x^2}(-2x)\cdot(2x+3)^2 + e^{-x^2}\cdot 2(2x+3)\cdot 2$$

6° $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3-x}{x^2-9}}$

Veo cuando $\dfrac{x^3-x}{x^2-9} \geq 0$

Numerador

$x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0$

$\Rightarrow x=0 \quad x=\pm 1$

Denominador

$x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3$

	-3		-1		0		1		3	
Numerador	$-$		$-$		$+$		$-$		$+$	$+$
Denominador	$+$		$-$		$-$		$-$		$-$	$+$
$f(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$	$+$

y por tanto $\text{Dom} f(x) = (-3,-1] \cup [0,1] \cup (3,\infty)$

7° $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x^2-4}$ su dominio es $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

A. Verticales

$x=-2$, $x=2$. Veo los límites laterales

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^3-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{-}{-\cdot -}\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \frac{-}{-\cdot +}\infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{+}{-\cdot +}\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{+}{+\cdot +}\infty = +\infty$$

A Horizontales

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3+2}{x^2-4} = \pm\infty \qquad \text{No hay}$$

A Oblicuas

$$y = mx + b$$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3+2}{x^3-4x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3+2}{x^2-4} - x =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3+2-x^3+4x}{x^2-4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x+2}{x^2-4} = 0$$

La asíntota oblicua es la recta $y = x$