SOLUCIÓN   Salvo error u omisión   13-1-11

1°
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Veo el rango de A

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ Rango $A \geq 2$

$|A| = 2 + a^2 - (2+a) = a^2 - a$

Si $a^2 - a = 0 \Rightarrow a = 1$ ó $a = 0$ Rango $A = 2$

Si $a \neq 1$ y $a \neq 0 \Rightarrow$ Rango $A = 3$

Veo Rango de $\bar{A}$

Si $a \neq 1$ y $a \neq 0 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Si $a = 1$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Rango $\bar{A} = 2$ $(F_1 = F_3)$

Si $a = 0$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Por el Teorema de Rouche-Frobenius

Si $a \neq 1$ y $a \neq 0$
Rango A = Rango $\bar{A}$ = nº incog $\Rightarrow$ SCDet

Si $a = 1$
Rango A = Rango $\bar{A}$ < nº incog $\Rightarrow$ SCIndet

Si $a = 0$
Rango A < Rango $\bar{A}$ $\Rightarrow$ S Incomp.

Resuelvo para $a=3$ (por Gauss)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=1 \\ 2y+3z=2 \\ -2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=0 \Rightarrow z=\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Solución $(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$

Para $a=1$ sé que es comp. indet.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2y+z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2y+z=2 \end{array}\right\} \quad y=\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=2-2\lambda \Rightarrow x = 1-\lambda-(2-2\lambda) = \lambda - 1$$

Solución $(x,y,z) = (\lambda-1, \lambda, 2-2\lambda) \;/\; \lambda \in \mathbb{R}$

2°

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$$

Veo rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A \geq 2$$

$$|A| = 1+2m+m-(1+2+m^2) = -m^2+3m-2$$

Si $-m^2+3m-2=0 \Rightarrow m^2-3m+2=0$

$$m = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm 1}{2} \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{array} \Rightarrow \text{Rango } A = 2$$

Si $m \neq 2$ y $m \neq 1 \Rightarrow$ Rango $A = 3$

Veo Rango de $\bar{A}$

Si $m \neq 2$ y $m \neq 1 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Si $m=1$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-3=-1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Rango $\bar{A}=3$

Si $m=2$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ tiene rango 2 por tener tres columnas iguales.

Por el teorema de Rouche-Frobenius

Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$

Rango A = Rango $\bar{A}$ = nº incog $\Rightarrow$ S. Comp. Det

Si $m=1$

Rango A < Rango $\bar{A}$ $\Rightarrow$ S Incomp.

Si $m=2$

Rango A = Rango $\bar{A}$ < nº incog $\Rightarrow$ SComp Indet

b/ El sist. tiene infinitas soluciones si $m=2$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x+2y+z=1 \end{array}\right\} \text{Elimino una ecuación} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y+z=1 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{Ec\,2-Ec\,1} \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ \quad y \quad =0 \end{array}\right\} \qquad z=\lambda \Rightarrow x=1-\lambda$$

Solución $(x,y,z)=(1-\lambda, 0, \lambda)\ /\ \lambda \in \mathbb{R}$

c/ Si $m=0$ resuelvo por Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=-1 \\ -y-2z=2 \\ -y \qquad = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow y=-2 \Rightarrow z=0 \Rightarrow x=1$$

Solución: $(x,y,z) = (1,-2,0)$

3º a/ Para que A tenga inversa su determinante debe ser diferente de cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m+1-(2+1) = m-2$$

$\Rightarrow$ Si $m-2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$ A tiene inversa

b/ Para $m=3$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = 1$

Calculo matriz de los adjuntos

$$(Adj) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$A^{-1} = \frac{(adj)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $AX=B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4°) $x \equiv$ nº de ratones cazados
$y \equiv$ " " palomas "

	PROT	GRAS	VITAM
RATONES x	3x	4x	x
PALOMAS y	6y	2y	y
	30	20	8.

Tengo las restricciones

$$\left.\begin{array}{r} 3x+6y \geq 30 \\ 4x+2y \geq 20 \\ x+y \geq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y \geq 10 \\ 2x+y \geq 10 \\ x+y \geq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

y la función de gasto de energía $G(x,y) = 7x + 12y$

Represento

(1) $x+2y=10$

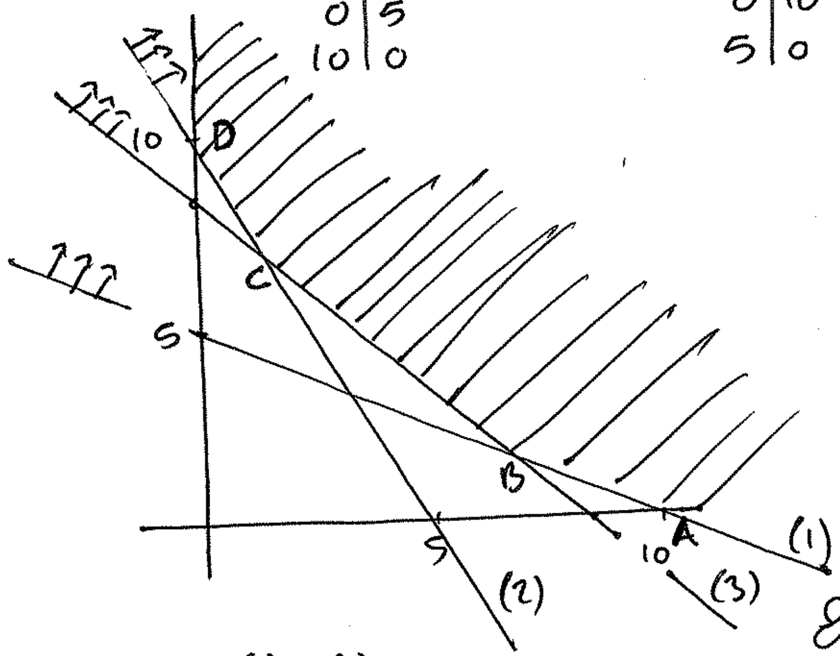
x	y
0	5
10	0

(2) $2x+y=10$

x	y
0	10
5	0

(3) $x+y=8$

x	y
0	8
8	0



Calculo los vértices

$A = (10,0)$

$B = (1) \cap (3)$

$$-\left.\begin{array}{r} x+2y=10 \\ x+y=8 \end{array}\right\}$$

$y = 2 \Rightarrow x = 6$

$B = (2,6)$

$C = (2) \cap (3)$

$$-\left.\begin{array}{r} 2x+y=10 \\ x+y=8 \end{array}\right\}$$

$x = 2 \Rightarrow y = 6$

$C = (6,2)$

$D = (0,10)$

Evalúo los vértices en $G(x,y)$

A $G(10,0) = 70$

B $G(2,6) = 86$

C $G(6,2) = 66$ ← mínimo.

D $G(0,10) = 120$

Debe cazar 6 ratones y 2 palomas

5º $x \equiv$ nº de viajes del barco A
$y \equiv$ nº de viajes del barco B

Tengo las restricciones

$$\left.\begin{array}{r} x \geq y \\ x \leq 12 \\ x+y \geq 6 \\ x+y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x-y \geq 0 \\ x+y \geq 6 \\ x+y \leq 20 \\ x \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La función de ganancias es $G(x,y) = 18000x + 12000y$

Representa

(1) $x - y = 0$

x	y
0	0
10	10

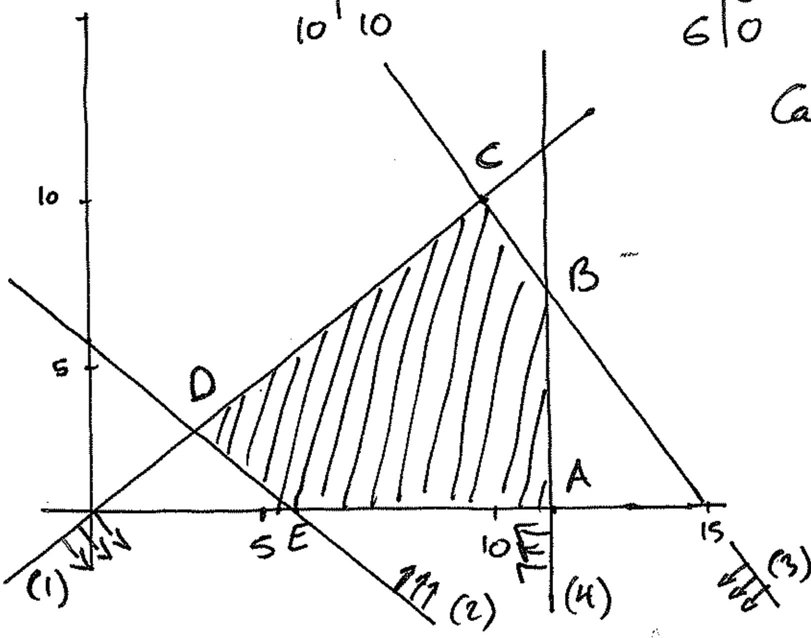
(2) $x + y = 6$

x	y
0	6
6	0

(3) $x + y = 20$

x	y
10	10
15	5

(4) $x = 12$



Calculo los vértices

$A = (12, 0)$

$B = (3) \cap (4)$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=20 \\ x=12 \end{array}\right\} \Rightarrow B = (12, 8)$$

$C = (1) \cap (3)$

$$\begin{array}{r} x-y=0 \\ + \quad x+y=20 \\ \hline 2x = 20 \end{array} \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = 10$$

$C = (10, 10)$

$D = (1) \cap (2)$

$$\begin{array}{r} x-y=0 \\ + \quad x+y=6 \\ \hline 2x = 6; \ x = 3 \end{array}$$

$\Rightarrow y = 3 \quad D = (3,3)$

$E = (6, 0)$

Evalúo los vértices en $G(x,y)$

A $G(12,0) = 216000$
B $G(12,8) = 312000 \leftarrow$ Máximo
C $G(10,10) = 300.000$
D $G(3,3) = 90.000$
E $G(6,0) = 108.000$

El beneficio máximo, 312.000 euros, se alcanza con 12 viajes del barco A y 8 del barco B.

(6/6)