REC. 1ª EVAL 2º A MAT. APLIC. CCSS II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión 12-1-10

(1º)
$$\begin{pmatrix} m & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Estudio Rango A

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -m \end{vmatrix} = -m^2+3m+1-(-3+m+m^2) = -2m^2+2m+4$$

$\Rightarrow$ si $m^2-m-2=0 \Rightarrow m = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ si $m=2$ o $m=-1$ Rango $A=2$

si $m\neq 2$ y $m\neq -1$ Rango $A=3$

Veo Rango $\bar{A}$

si $m\neq 2$ y $m\neq -1$ Rango $\bar{A}=3$

si $m=2$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ sé que C_2 y C_3 son l. indep. por tanto veo el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1-10+24-(10-3+8) = 15-15=0 \Rightarrow \text{Rango } \bar{A}=2$$

si $m=-1$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ igual que antes, veo

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+5-12-(-5-3-4) = -6+12 = 6 \neq 0 \Rightarrow$$
$\Rightarrow$ Rango $\bar{A}=3$

Por el teorema de Rouche

Si $m \neq 2$ y $m \neq -1$

Rango A = Rango $\bar{A}$ = nº incog $\Rightarrow$ S.C. Determinado

Si $m = 2$

Rango A = Rango $\bar{A}$ < nº incog $\Rightarrow$ S.C. Indeterm.

Si $m = -1$

Rango A < Rango $\bar{A}$ $\Rightarrow$ S. Incompatible

Resuelvo para $a = 2$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-3z=5 \\ -x+y+z=-4 \end{array}\right\} \xrightarrow{Ec1-Ec2} \left.\begin{array}{l} 3x-4z=9 \\ -x+y+z=-4 \end{array}\right\} \quad z=\lambda$$

$$\Rightarrow x = \frac{9+4\lambda}{3} \Rightarrow y = \frac{9+4\lambda}{3} - \lambda - 4 = \frac{9+4\lambda-3\lambda-12}{3} =$$

$$= \frac{\lambda-3}{3}$$

Soluc $(x,y,z) = \left(\frac{9+4\lambda}{3}, \frac{\lambda-3}{3}, \lambda\right) / \lambda \in \mathbb{R}$.

2º

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$$

Veo Rango A

$|A| = a^3+2-3a$ por tanto si $a^3-3a+2=0$

Resuelvo por Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2+x-2=0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow -2 \end{array}$

Si $a=1$ se ve que Rango $A = 1$

Si $a=-2 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow$ Rango $A = 2$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Rightarrow$ Rango $A = 3$

Veo Rango $\bar{A}$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Si $a = 1$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Se ve que su Rango es 1

Si $a = -2$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$ Sé que C_1 y C_2 son l. indep Veo el determinante

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16+1-2-(-2+4+4) = 9 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } \bar{A} = 3$$

Por el teorema de Rouche-Frobenius

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$

Rango A = Rango $\bar{A}$ = nº incog $\Rightarrow$ S.C. Det.

Si $a = 1$

Rango A = Rango $\bar{A}$ < nº incog $\Rightarrow$ S.C. Indet

Si $a = -2$

Rango A < Rango $\bar{A}$ $\Rightarrow$ S. Incomp.

Resuelvo para $a = -1$

$$\left.\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= -1 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[Ec3+Ec1]{Ec2+Ec1} \left.\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ 2z &= 0 \\ 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow z = 0, \ y = 1 \Rightarrow x = y + z - 1 \Rightarrow x = 0$

Solución $(x, y, z) = (1, 0, 1)$

③ $A = A^t$

$$A^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{a}{5} = \frac{a}{5} \\ \frac{4}{5} = -\frac{4}{5} \end{array}\right\}$$ lo cual es imposible, por tanto nunca se da dicha condición

④ a/ Calculo $|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -15 - 12 - (-12 - 16) = 1$

$\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ sí existe A^{-1}. La calculo

$$(Adj) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(Adj)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculo $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 2 - (-1 - 6) = 0$

por tanto no es invertible

b/ $X \cdot A - B = 2I \Rightarrow X \cdot A = B + 2I \Rightarrow X = (B + 2I)A^{-1}$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -20 & 3 \\ 17 & -13 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

c/ $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto $A^4 = A^3 \cdot A = A$; $A^5 = A^2$; $A^6 = I$, ...

$A^{86} = A^{28\cdot 3+2} = A^{3\cdot 28} \cdot A^2 = (A^3)^{28} \cdot A^2 = I^{28} \cdot A^2 = I \cdot A^2 =$

$= A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5º $\begin{vmatrix} 2p & 2q & 2r \\ 2a & 2b & 2c \\ 2u & 2v & 2w \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ u & v & w \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}$

$\overset{(3)}{=} -8 \cdot (-4) = 32$

(1) Si una fila está multiplicada por un nº, el det queda multiplicado por dicho nº

(2) Si permuto dos filas el determinante cambia de signo

(3) Por hipótesis.

6º Sea x = nº semanas que trabaja G1
y = nº " " " G2

		A	B	C
G1	x	3x	2x	2x
G2	y	2y	3y	2y
		6	12	10

Se plantean las restricciones

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y \geq 6 \\ 2x+3y \geq 12 \\ 2x+2y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

y la función de gastos

$$G(x,y) = 3300x + 3500y$$

Represento.

(1) $3x+2y=6$

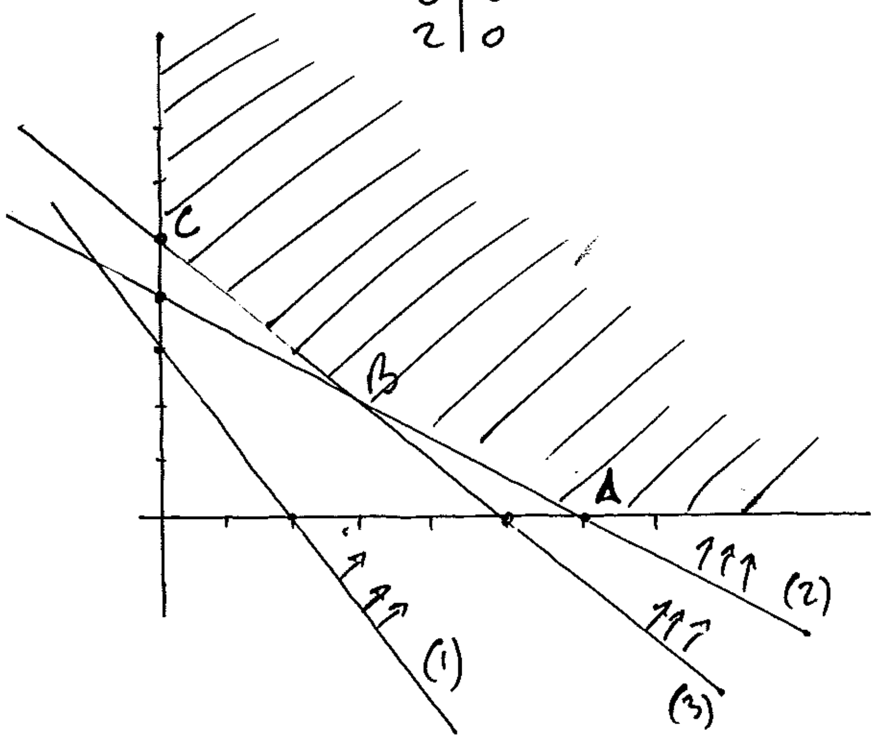
x	y
0	3
2	0

(2) $2x+3y=12$

x	y
0	4
6	0

(3) $x+y=5$

x	y
0	5
5	0



Calculo los vértices

$A = (6,0)$

$B = (2) \cap (3)$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=12 \\ x+y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=12 \\ 2x+2y=10 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow y=2 \Rightarrow x=3$

$B=(3,2)$

$C=(0,5)$

Evalúo en $G(x,y)$

A $\quad G(6,0) = 6 \cdot 3300 = 19800$

B $\quad G(3,2) = 3 \cdot 3300 + 2 \cdot 3500 = 16900$

C $\quad G(0,5) = 5 \cdot 3500 = 17500$

El gasto mínimo se da con 3 semanas de trabajo de G1 y 2 de G2

7°

$x \equiv$ nº paquetes tipo A

$y \equiv$ nº paquetes tipo B

Tengo las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y \le 400 \\ 2x+y \le 300 \\ x+2y \le 250 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

La función de ganancias es

$$G(x,y) = 25x + 35y$$

Represento

(1) $2x+3y=400$

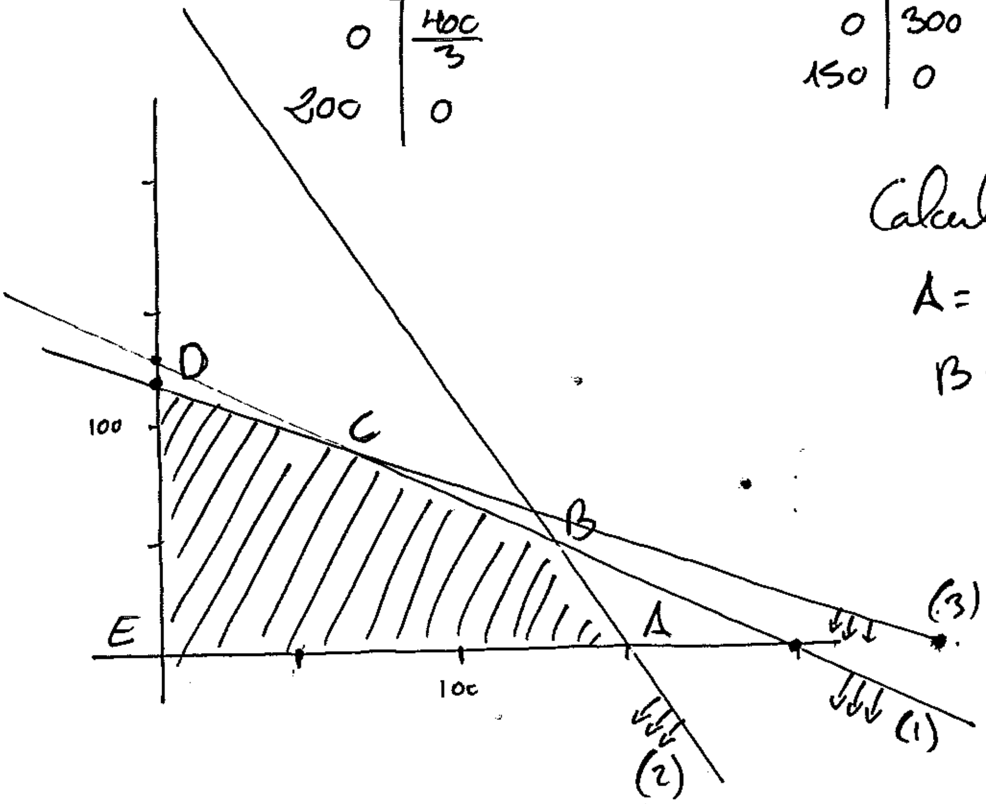
x	y
0	$\frac{400}{3}$
200	0

(2) $2x+y=300$

x	y
0	300
150	0

(3) $x+2y=250$

x	y
0	125
250	0



Calculo los vértices

$A = (150, 0)$

$B = (1) \cap (2)$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=400 \\ 2x+y=300 \end{array}\right\}$$

$2y = 100 \Rightarrow y = 50$

$\Rightarrow x = 125$

$B = (125, 50)$

C $(1) \cap (3)$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=400 \\ x+2y=250 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=400 \\ 2x+4y=500 \end{array}\right\}$$

$y = 100 \Rightarrow x = 50$

$C = (50, 100)$

$D = (0, 125)$ $E = (0,0)$

Evalúo en $G(x,y)$

A	$G(150,0)$	$= 25 \cdot 150 = 3750$
B	$G(125,50)$	$= 25 \cdot 125 + 35 \cdot 50 = 4875$
C	$G(50,100)$	$= 25 \cdot 50 + 35 \cdot 100 = 4750$
D	$G(0,125)$	$= 35 \cdot 125 = 4375$
E	$G(0,0)$	$= 0$

Por tanto el máximo beneficio se alcanza con 125 paquetes tipo A y 50 tipo B.