EXAMEN 2ºC MAT. APLIC. II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión 9-12-10

(1º) a/ Veo si se cumple que $A\cdot A^t = I$

$$A\cdot A^t = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{25}+\frac{9}{25} & 0 & 0 \\ \frac{12}{25}-\frac{12}{25} & \frac{9}{25}+\frac{16}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Por tanto A es una matriz ortogonal

b/ Como sé que $A\cdot A^t = I$ tengo que $A^{-1}\cdot A\cdot A^t = A^{-1}\cdot I$ es decir $I\cdot A^t = A^{-1}$ y obtengo que $A^t = A^{-1}$

Por lo tanto

$$A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$ Opero

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5+3/5 \\ -1 \\ -3/5+4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -1 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

(2º)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 20a \\ 9 \end{pmatrix}$$

a/ Veo el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A \geq 2$$

$$|A| = -4a + 3(a+1) + 1 - (-2(a+1) + 6a + 1) = -a + 4 - (4a-1) =$$

(1/6)

$= -5a+5$

Si $-5a+5=0 \Rightarrow a=1$ Rango $A=2$

Si $a \neq 1 \Rightarrow$ Rango $A=3$

Veo Rango de $\bar{A}$

Si $a\neq 1 \Rightarrow$ Rango $\bar{A}=3$

Si $a=1$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Sé que C_1 y C_2 son l. indep y que C_3 depende de ellas. Por tanto estudio el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 3 & -2 & 20 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -18+27+20-(-18+27+20)=0$$

Es decir, Rango $\bar{A}=2$

Por el Teorema de Rouche-Frobenius

Si $a=1$

Rango $A=$ Rango $\bar{A}=2<$ nº incog $\Rightarrow$ S.C. Indet.

Si $a\neq 1$

Rango $A=$ Rango $\bar{A}=$ nº incog $\Rightarrow$ S.C. Determ.

b/ Resuelvo para $a=1$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=9 \\ 3x-2y+z=20 \end{array}\right\} \xrightarrow{Ec2-3Ec1} \left.\begin{array}{r} x+y+2z=9 \\ -5y-5z=-7 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+2z=9 \\ 5y+5z=7 \end{array}\right\} \quad z=\lambda \Rightarrow y=\frac{7-5\lambda}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=9-y-2z=9-\frac{7-5\lambda}{5}-2\lambda=\frac{45-7+5\lambda-10\lambda}{5}=\frac{38-5\lambda}{5}$$

Solución $(x,y,z)=\left(\frac{38-5\lambda}{5}, \frac{7-5\lambda}{5}, \lambda\right) / \lambda\in\mathbb{R}$

c/ Si $a=2$ Resuelvo por Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 40 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -8 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+3z=9 \\ 5y+8z=-13 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow z=0 \Rightarrow y=\frac{-13}{5} \Rightarrow x=9-y-3z=$$

$$=9+\frac{13}{5}=\frac{45+13}{5}=\frac{58}{5}$$

Solución $(x,y,z)=\left(\frac{58}{5},\frac{-13}{5},0\right)$

③ $x \equiv$ nº prendas tipo A
$y \equiv$ " " " B

Tengo las siguientes restricciones: (ojo con pasar las horas a minutos)

$$\left.\begin{array}{r} 30x+60y \leq 5100 \\ 45x+20y \leq 4500 \\ x+y \geq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y \leq 170 \\ 9x+4y \leq 900 \\ x+y \geq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La función de ganancias es $G(x,y)=20x+17y$

Represento

(1) $x+2y=170$

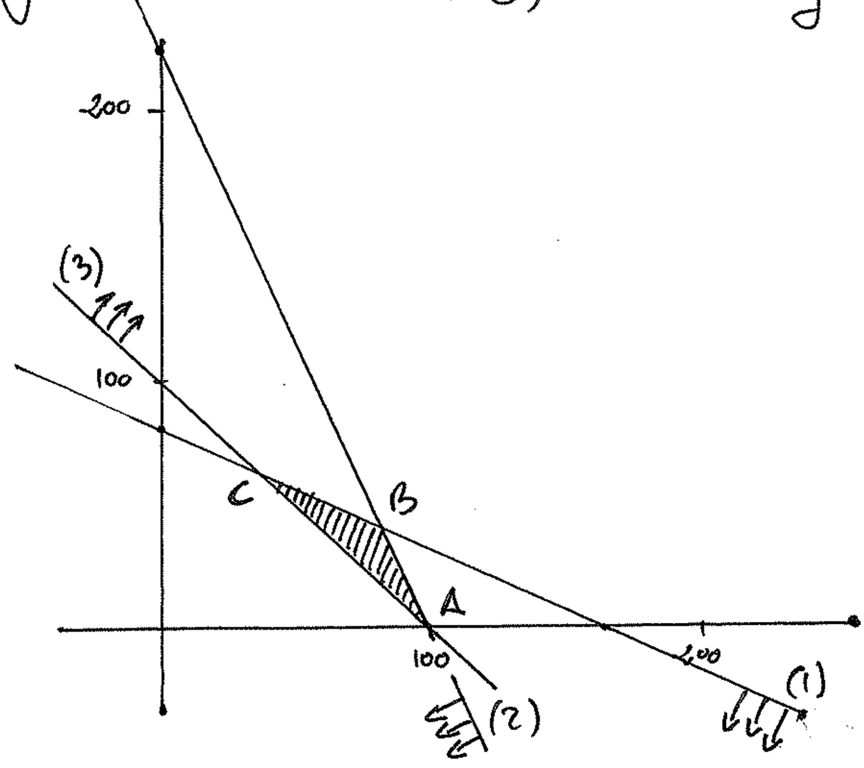
x	y
0	85
170	0

(2) $9x+4y=900$

x	y
0	225
100	0

(3) $x+y=100$

x	y
0	100
100	0



Calculo los vértices

A : $(100,0)$

B : $(1)\cap(2)$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=170 \\ 9x+4y=900 \end{array}\right\} \quad x=170-2y \Rightarrow 9(170-2y)+4y=900 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1530-18y+4y=900 \Rightarrow 14y=630 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=45 \Rightarrow x=80 \quad \Rightarrow \quad B=(80,45)$$

C: $(1)\cap(3)$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=170 \\ x+y=100 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x=170-2y \Rightarrow \quad 170-2y+y=100 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=70 \Rightarrow x=30 \Rightarrow \quad C=(30,70)$$

Evalúo

A $\quad G(100,0)=2000$

B $\quad G(80,45)=20\cdot 80+17\cdot 45=2365$

C $\quad G(30,70)=20\cdot 30+17\cdot 70=1790$

Por tanto deben fabricarse 80 prendas tipo A y 45 prendas tipo B, obteniéndose un beneficio de 2365 €

(4º) $x\equiv$ cantidad de petróleo A
$y\equiv$ " " " B

Tengo las restricciones

$$\left.\begin{array}{r} 0'10x+0'05y\geq 10 \\ 0'35x+0'55y\geq 50 \\ x\leq 100 \\ y\leq 100 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x+y\geq 200 \\ 7x+11y\geq 1000 \\ x\leq 100 \\ y\leq 100 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right.$$

La función de gastos es

$$G(x,y)=350x+400y$$

Represento

(1) $2x+y=200$

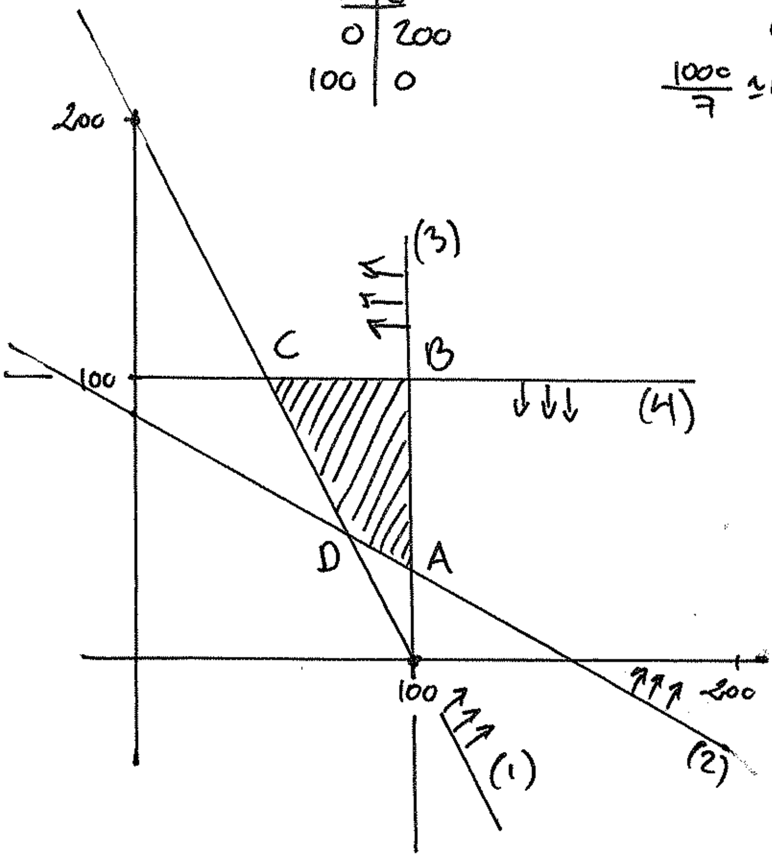
x	y
0	200
100	0

(2) $7x+11y=1000$

x	y
0	$\frac{1000}{11} \simeq 90'9$
$\frac{1000}{7} \simeq 142'9$	0

(3) $x=100$

(4) $y=100$



Calculo los vértices

A (2) ∩ (3)

$$\left.\begin{aligned} 7x+11y&=1000 \\ x&=100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=\frac{400}{11}$$

$$A=\left(100, \frac{400}{11}\right)$$

B $(100, 100)$

C (1) ∩ (4)

$$\left.\begin{aligned} 2x+y&=200 \\ y&=100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=50$$

$$C=(50,100)$$

D = (1) ∩ (2)

$$\left.\begin{aligned} 2x+y&=200 \\ 7x+11y&=1000 \end{aligned}\right\} \; y=200-2x \Rightarrow 7x+11(200-2x)=1000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x+2200-22x=1000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x=1200 \Rightarrow x=80 \Rightarrow y=40 \qquad D=(80,40)$$

Evalúo

A $G\left(100, \frac{400}{11}\right) \simeq 49545$

B $G(100,100)=75000$

C $G(50,100)=57500$

D $G(80,40)=44.000$

Las necesidades se cubren con 80 t del petróleo A y 40 t del B, con un coste mínimo de 44000 €

5° $x \equiv$ longitud cable del tipo A   (la unidad son 100 m de cable)
$y \equiv$ " " " " B

Tengo las restricciones

$$\left.\begin{array}{l} 10x + 15y \le 195 \\ 2x + y \le 20 \\ x + y \le 14 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 3y \le 39 \\ 2x + y \le 20 \\ x + y \le 14 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

La función de ganancias es

$$G(x,y) = 1500x + 1000y$$

Represento

(1) $2x+3y=39$

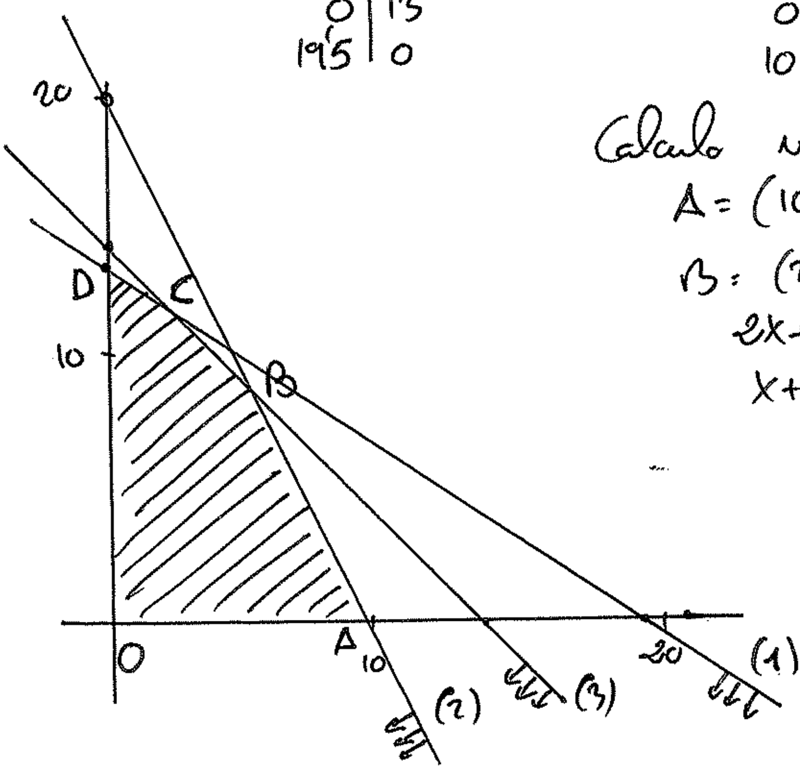
x	y
0	13
19'5	0

(2) $2x+y=20$

x	y
0	20
10	0

(3) $x+y=14$

x	y
0	14
14	0



Calculo vértices

$A = (10,0)$

$B: (2) \cap (3)$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=20 \\ x+y=14 \end{array}\right\} \text{Ec1} - \text{Ec2} \Rightarrow x=6 \Rightarrow y=8 \qquad B = (6,8)$$

$C \quad (1) \cap (3)$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=39 \\ x+y=14 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} 2x+3y=39 \\ -2x+2y=28 \\ \hline y=11 \end{array}$$

$\Rightarrow x = 3 \qquad C = (3,11)$

$D = (0,13)$.

Evaluo

A $\quad G(10,0) = 15000$

B $\quad G(6,8) = 17000$

C $\quad G(3,11) = 15500$

D $\quad G(0,13) = 13000$

El máximo beneficio, 17000 €, se alcanza fabricando 600 m de cable A y 800 m de cable B