EXAMEN 2ºA MAT. APLIC. II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión 26-11-09

① $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Estudio Rango A

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Rango $A \geq 2$ (y C_2 y C_3 l. indep)

$|A| = 2a - (a+1+2a) = -a-1$

Si $-a-1=0 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow$ Rango $A = 2$

Si $a \neq -1 \Rightarrow$ Rango $A = 3$

Veo Rango $\bar{A}$

Si $a \neq -1 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Si $a=-1$

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} C_2+C_3 & C_2 & C_3 & \end{array} \end{array}$$

Calculo $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 2$

Por el teorema de Rouche-Frobenius

Si $a \neq -1$

Rango A = Rango $\bar{A}$ = nº incog $\Rightarrow$ S.C. Determ.

Si $a=-1$

Rango A = Rango $\bar{A}$ < nº incog $\Rightarrow$ S.C. Indet.

Resuelvo.

Si $a \neq -1$, por la regla de Cramer tengo que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2a+2-(a+3+2a)}{-a-1} = \frac{-a-1}{-a-1} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a+1 & a+3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^2+3a-(a^2+a+2a)}{-a-1} = \frac{0}{-a-1} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a+1 & 2 & a+3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4a+2a^2+2a-(2a+2+2a^2+6a)}{-a-1} =$$

$$= \frac{4a+\cancel{2a^2}+\cancel{2a}-\cancel{2a}-2-\cancel{2a^2}-6a}{-a-1} = \frac{-2a-2}{-a-1} = \frac{2(-a-1)}{-a-1} = 2$$

Soluc: $(x,y,z) = (1,0,2)$

Si $a = -1$

$$\left.\begin{aligned} -x+y &= 1 \\ 2y+z &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &y=\lambda \Rightarrow z = 2-2\lambda \\ &\Rightarrow x = y-1 = \lambda-1 \end{aligned}$$

Soluc. $(x,y,z) = (\lambda-1, \lambda, 2-2\lambda) \ / \ \lambda \in \mathbb{R}$

(2)

$$2A = AX + B$$
$$AX = 2A - B$$
$$X = A^{-1}(2A - B)$$

Calculo A^{-1}

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ no existe A^{-1} y por tanto la ecuación planteada no tiene solución.

(3) $x \equiv$ ordenadores de A a M

$y \equiv$ ordenadores de A a N

Tengo la siguiente tabla para el transporte

	M	N	O
A	x	y	$50-x-y$
B	$35-x$	$50-y$	$x+y-5$

Calculo la función de coste.

$$G(x,y) = 5x + 6y + 8(50-x-y) + 7(35-x) + 4(50-y) + 2(x+y-5) =$$
$$= 5x + 6y + 400 - 8x - 8y + 245 - 7x + 200 - 4y + 2x + 2y - 10 =$$
$$= -8x - 4y + 835$$

De la tabla obtengo las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{r} 50 - x - y \geq 0 \\ x + y - 5 \geq 0 \\ 35 - x \geq 0 \\ 50 - y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y \leq 50 \\ x + y \geq 5 \\ x \leq 35 \\ y \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Doy valores

(1) $x+y=50$

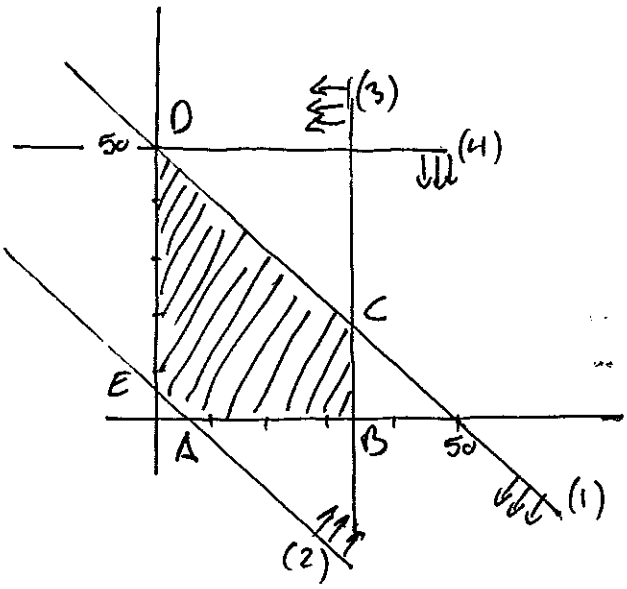
x	y
0	50
50	0

(2) $x+y=5$

x	y
0	5
5	0

(3) $x=35$

(4) $y=50$



Calculo los vértices

$A=(5,0)$

$B=(35,0)$

$C=(1)\cap(2)$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=50 \\ x=35 \end{array}\right\} \Rightarrow y=15$$

$C=(35,15)$

$D=(0,50)$

$E=(0,5)$

Evalúo en $G(x,y)$

A $\quad G(5,0)=835-8\cdot 5=795$

B $\quad G(35,0)=835-8\cdot 35=555$

C $\quad G(35,15)=835-8\cdot 35-4\cdot 15=495$ ← Mínimo.

D $\quad G(0,50)=835-4\cdot 50=635$

E $\quad G(0,5)=835-4\cdot 5=815$

Por tanto el mínimo gasto se obtiene con la siguiente distribución de ordenadores

	M	N	O
A	35	15	0
B	0	35	45

4º

	N_1	N_2	N_3
A	2	1	1
B	1	3	2
al menos →	4	6	5

Sean $x \equiv$ nº de unidades A
$y \equiv$ " " " B

tengo las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y \geq 4 \\ x+3y \geq 6 \\ x+2y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

y la función de gastos

$G(x,y) = x + 2'4\,y$

Doy valores

(1) $2x+y=4$

x	y
0	4
2	0

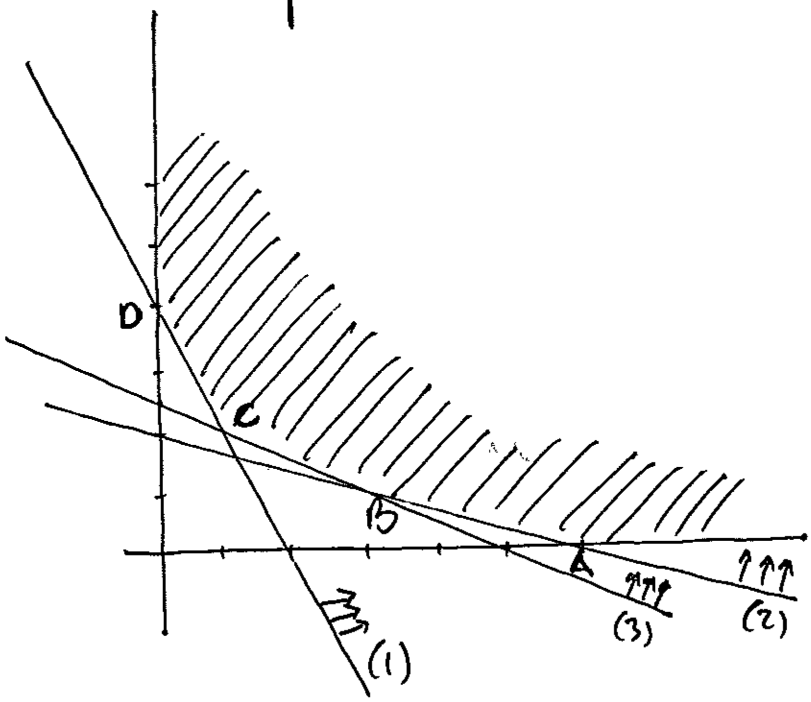
(2) $x+3y=6$

x	y
0	2
6	0

(3) $x+2y=5$

x	y
0	5/2
5	0

Represento



Calculo los vértices

$A = (6,0)$

$B = (2) \cap (3)$

$$\left.\begin{array}{l} x+3y=6 \\ x+2y=5 \end{array}\right\}$$
$y=1 \Rightarrow x=3$

$B = (3,1)$

$C \quad (1) \cap (3)$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=4 \\ x+2y=5 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x+y=4 \\ 2x+4y=10 \end{array}\right\}$$
$3y=6$
$y=2$

$\Rightarrow x=1$
$C=(1,2)$

$D = (0,4)$

Evalúo en $G(x,y)$

A $G(6,0) = 6$

B $G(3,1) = 3 + 2'4 = 5'4$

C $G(1,2) = 1 + 2\cdot 2'4 = 5'8$

D $G(0,4) = 4\cdot 2'4 = 9'6$

Por tanto el mínimo gasto se alcanza con 3 unidades de A y 1 unidad de B

(5º) Sean $x \equiv$ nº de días que trabaja la mina A

$y \equiv$ " " " B

Hago una tabla

	Fe AC	Fe CM	Fe BC
A	1	3	5
B	2	2	2

Tengo las restricciones

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y \geq 80 \\ 3x + 2y \geq 160 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La función de gastos es

$G(x,y) = 2000x + 2000y$.

Doy valores

(1) $x + 2y = 80$

x	y
0	40
80	0

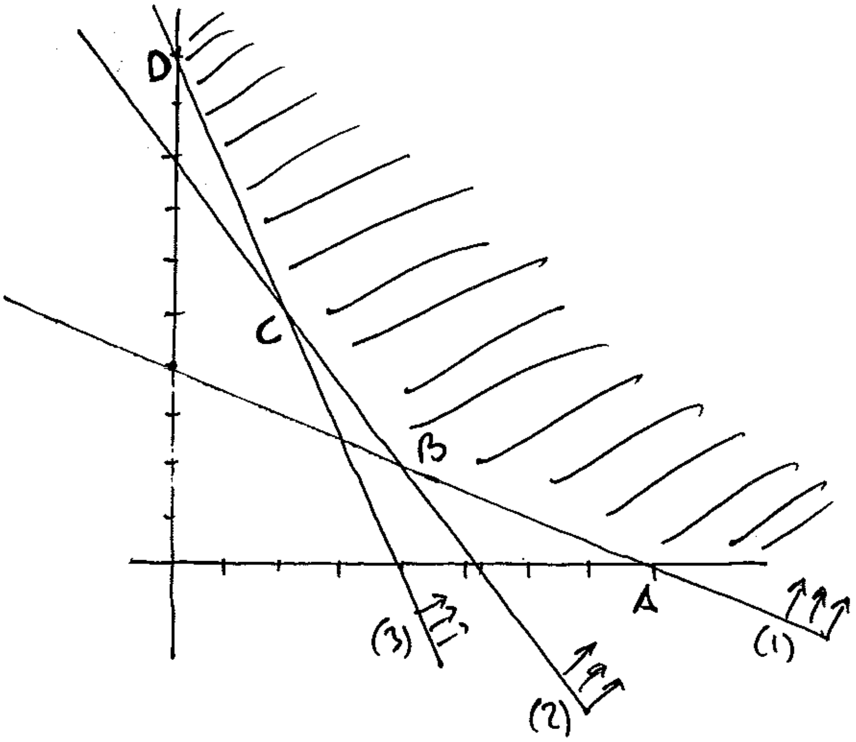
(2) $3x + 2y = 160$

x	y
0	80
$\frac{160}{3}$	0

(3) $5x + 2y = 200$

x	y
0	100
40	0

Represento



Calculo los vértices

A = (80,0)

B = (1) ∩ (2)

$$\begin{cases} x+2y=80 \\ 3x+2y=160 \end{cases}$$

$2x = 80$

$x=40 \Rightarrow y=20$

B = (40, 20)

C (2) ∩ (3)

$$\begin{cases} 3x+2y=160 \\ 5x+2y=200 \end{cases}$$

$2x = 40 \Rightarrow x=20$

$y=50$

C = (20,50)

D = (0,100)

Evalúo los vértices en G(x,y)

A $G(80,0) = 2000 \cdot 80 = 160000$

B $G(40,20) = 2000 \cdot 60 = 120000$

C $G(20,50) = 2000 \cdot 70 = 140000$

D $G(0,100) = 2000 \cdot 100 = 200000$

Por tanto el gasto mínimo se obtiene con 40 días de trabajo de la mina A y 20 de la B