EXAMEN 2ºA MATEM. APLIC. II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión 21-11-11

(1º) $x \equiv$ cantidad invertida en refrescos (sin impuestos)
$y \equiv$ " " " cerveza "
$z \equiv$ " " " vino "

Tengo que

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=500 \\ x+y=z+60 \\ 1'06x+1'12y+1'3z=592'4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=500 \\ x+y-z=60 \\ 53x+56y+65z=29620 \end{array}\right\}$$

y resolviendo $x=120$ $y=160$, $z=220$

Por lo tanto pago $120 \cdot 1'06 = 127'2$ € en refrescos, $160 \cdot 1'12 = 179'2$ € en cerveza y $220 \cdot 1'3 =$
$= 286$ € en vino

(2º)

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m+1 \end{pmatrix}$$

Estudio el rango de A

$$|A| = 1+m+m(m-1)-(1+m^2+m-1) = m^2+1-(m^2+m) =$$
$$= 1-m \quad \text{Por tanto}$$

Si $m-1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1 \Rightarrow$ Rango $A=3$

Si $m=1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 2$$

Veo el rango de $\bar{A}$

Si $m \neq 1 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Si $m = 1$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 2$

Por el Teorema de Rouche - Frobenius

Si $m \neq 1$

Rango A = Rango $\bar{A}$ = nº incog $\Rightarrow$ SCD

Si $m = 1$

Rango A < Rango $\bar{A}$ $\Rightarrow$ SI

(3º)

$$\begin{pmatrix} 1 & K & K \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & K & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ K \\ K \end{pmatrix}$$

a) Veo Rango de A

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ Rango $A \geq 2$

$|A| = 2 + K^2 - (2K + K) = K^2 - 3K + 2$

Si $K^2 - 3K + 2 = 0 \Rightarrow K = 1$ ó $K = 2 \Rightarrow$ Rango $A = 2$

Si $K \neq 1$ y $K \neq 2$ Rango $A = 3$

Veo rango de $\bar{A}$

Si $K \neq 1 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Si $K = 1$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ Tiene rango 2 por tener dos filas iguales.

Si $K = 2$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } \bar{A} = 3$$

Por el Teorema de Rouche-Frobenius.

Si $K \neq 1$

$\text{Rango } A = \text{Rango } \bar{A} = \text{nº incog} \Rightarrow \text{SCD}$

Si $K = 1$

$\text{Rango } A = \text{Rango } \bar{A} < \text{nº incog} \Rightarrow \text{SCI}$

Si $K = 2$

$\text{Rango } A < \text{Rango } \bar{A} \Rightarrow \text{SI}$

b/ El sistema tiene infinitas soluciones si $K=1$

Elimino la 1ª ecuación (por ser igual a la 2ª)

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1 \\ x+y+2z&=1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{Ec2-Ec1} \left.\begin{aligned} x+y+z&=1 \\ z&=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow z=0 \Rightarrow y=\lambda \Rightarrow x=1-\lambda$$

Soluc: $(x,y,z)=(1-\lambda, \lambda, 0) \ / \ \lambda \in \mathbb{R}$

c/ Para $K=4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_3+4F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+4y+4z&=4 \\ -3y-3z&=0 \\ -6z&=12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z=-2$$

$$\Rightarrow y=2 \Rightarrow x=4$$

Soluc $(x,y,z)=(4,2,-2)$

4º a/ Para que no exista A^{-1} su determinante debe ser cero

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 3 \end{vmatrix} = 3a-a=2a \Rightarrow 2a=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a=0$$

(3/5)

b/ $a=2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Calcular $B=(A^{-1}\cdot A^{t})^2$.

Calculo A^{-1}; $|A|=4$

$$(Adj)=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{(Adj)^t}{|A|}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y tengo que

$$B=\left[\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^2=$$

$$=\begin{pmatrix} 19/16 & 21/16 \\ -7/8 & -1/8 \end{pmatrix}$$

c/ $AX-A^2=A^t \Rightarrow X=A^{-1}\cdot(A^t+A^2)$ Es decir

$$X=\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix} 13/4 & 7/4 \\ 3/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

5º a/ $|A|=-4K+3-(-K^2)=K^2-4K+3$

Si $K^2-4K+3=0 \Rightarrow K=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

Si $K=3$ ó $K=1$ A no tiene inversa.

b/ Si $K=0$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad |A| = 3$

$$(Adj) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -12 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(Adj)^t}{|A|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

c/ $AX = B \Rightarrow A^{-1} A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow$

$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$