RECUPERACIÓN 2ºA MAT APLIC II

1ª EVALUACIÓN 20-1-08

SOLUCIÓN Salvo error u omisión

1º Sean $x \equiv$ precio de una unidad de A

$y \equiv$ " " " " " B

$z \equiv$ " " " " " C

Las condiciones del sistema se traducen en las siguientes ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=0'9 \\ x+2y+z=0'8 \\ x+y+2z=0'7 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+2z=0'7 \\ x+2y+z=0'8 \\ 2x+y+z=0'9 \end{array}\right\}$$

Resuelvo por Gauss

$$\xrightarrow[Ec3-2Ec1]{Ec2-Ec1} \left.\begin{array}{r} x+y+2z=0'7 \\ y-z=0'1 \\ -y-3z=-0'5 \end{array}\right\} \xrightarrow{Ec3+Ec2} \left.\begin{array}{r} x+y+2z=0'7 \\ y-z=0'1 \\ -4z=-0'4 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow z=0'1$

$\Rightarrow y=0'1+0'1=0'2 \Rightarrow x=0'7-0'2-0'2=0'3$

Por tanto cada unidad de A cuesta 0'3€, de B 0'2€ y de C 0'1€

2º $B\cdot X-A=2X \Rightarrow BX-2X=A \Rightarrow$

$\Rightarrow (B-2\cdot I)\cdot X=A \Rightarrow X=(B-2I)^{-1}\cdot A$

ojo, X sale a la derecha.

Hago las cuentas

$$B-2I=\begin{pmatrix}-2&1\\0&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&1\\0&1\end{pmatrix}$$

Calculo su inversa

$|B-2I| = -4$

$\mathrm{Adj} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ $\qquad (B-2I)^{-1} = \dfrac{\mathrm{Adj}^{t}}{|B-2I|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}}{-4} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto

$$X = (B-2I)^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/4 + 3/4 & 7/4 + 1/4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4/4 & 8/4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3º Escribo el sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

a) Veo el Rango de A

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Rango $A \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2a - a^2 = -a^2 + 2a - 1$$

Por tanto $\quad -a^2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$

Es decir, si $a = 1 \Rightarrow$ Rango $A = 2$

si $a \neq 1 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Veo el Rango de $\bar{A}$

Si $a \neq 1 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Estudio el caso $a = 1$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sé que C_1 y C_2 son l. indep y que C_3 depende linealmente de ellas, por tanto veo el determinante formado por C_1, C_2 y C_4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (C_1 = C_3)$$

Por tanto Rango $\bar{A} = 2$

Por el teorema de Rouche-Frobenius

Si $a \neq 1 \Rightarrow$ Rango A = Rango $\bar{A}$ = nº incog $\Rightarrow$ SCD

Si $a = 1 \Rightarrow$ Rango A = Rango $\bar{A} <$ nº incog $\Rightarrow$ SCI

b/ Resuelvo para $a = 1$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 1 \\ -y + z = 0 \\ x \quad + z = 1 \end{array}\right\}$$

Elimino la 3ª ecuación pues sé que las dos primeras son l. indep.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 1 \\ -y + z = 0 \end{array}\right\} \quad z = \lambda \Rightarrow y = \lambda$$

$$\Rightarrow x = 1 - 2\lambda + \lambda = 1 - \lambda$$

Solución $(x, y, z) = (1-\lambda, \lambda, \lambda) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}$

4º a/ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = -4 + 3 - (6) = -1 - 6 = -7 \Rightarrow$ Existe A^{-1}

Calculo la matriz de los adjuntos

$$\text{Adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}}{-7} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 & -1/7 \\ 6/7 & -4/7 & -3/7 \\ -3/7 & 2/7 & 5/7 \end{pmatrix}$$

b/ $\left.\begin{array}{l} x + y \le 9 \\ 4 \le x \le 2y \\ y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y \le 9 \\ x \ge 4 \\ x \le 2y \\ y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y \le 9 \\ x - 2y \le 0 \\ x \ge 4 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$

Represento

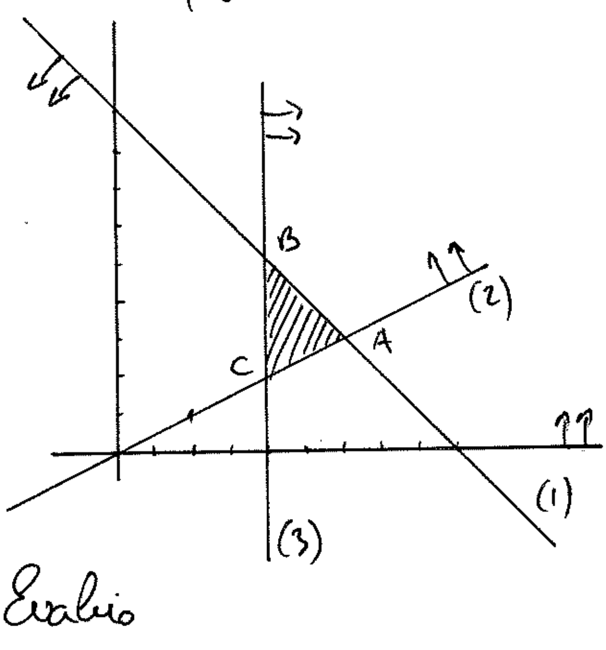
(1) $x + y = 9$

x	y
0	9
9	0

(2) $x - 2y = 0$

x	y
0	0
2	1

(3) $x = 4$



Calculo los vértices

$A = (1) \cap (2)$

$\left.\begin{array}{l} x + y = 9 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Restando $3y = 9$; $y = 3$

$\Rightarrow x = 6 \quad (6,3)$

$B = (1) \cap (3)$

$\left.\begin{array}{l} x + y = 9 \\ x = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 5 \quad (4,5)$

$C = (2) \cap (3)$

$\left.\begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ x = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2 \quad (4,2)$

Evalúo

$A \rightarrow G(6,3) = 30 \cdot 6 + 20 \cdot 3 = 240$

$B \rightarrow G(4,5) = 30 \cdot 4 + 20 \cdot 5 = 220$

$C \rightarrow G(4,2) = 30 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 160$

El máximo se alcanza en el punto $(6,3)$

(5º) Sean $x \equiv$ nº plazas fumadores

$y \equiv$ nº plazas no fumadores.

Tengo las restricciones

$$\left.\begin{array}{r} x+y \leq 90 \\ 20x+50y \leq 3000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y \leq 90 \\ 2x+5y \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

y la función de ganancias $f(x,y) = 100x + 60y$

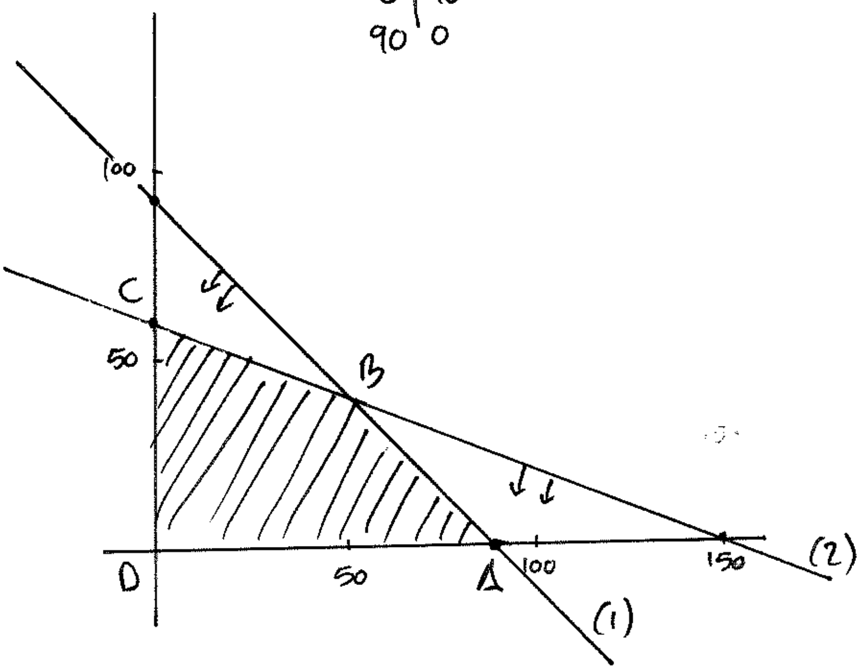
Represento

(1) $x + y = 90$

x	y
0	90
90	0

(2) $2x + 5y = 300$

x	y
0	60
150	0



Calculo los vértices

$A = (90, 0)$

$B = (1) \cap (2)$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=90 \\ 2x+5y=300 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+2y=180 \\ 2x+5y=300 \end{array}\right\}$$

$$3y = 120$$

$y = 40 \Rightarrow x = 50$ $(50, 40)$

$C = (0, 60)$

$D = (0, 0)$

Evalúo en $f(x,y)$

$A \Rightarrow f(90,0) = 100 \cdot 90 = 9000$

$B \Rightarrow f(50,40) = 100 \cdot 50 + 40 \cdot 60 = 7400$

$C \Rightarrow f(0,60) = 60 \cdot 60 = 3600$

$D \Rightarrow f(0,0) = 0$

El máximo beneficio se alcanza vendiendo 90 billetes de fumadores.

(5/5)