EXAMEN 2ºA MAT. APLIC. II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión 16-12-11

(1º) a/ Calculo el rango de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & K & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & K \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow$ Rango $A \geq 2$

$|A| = -K + 8 + 2K - (1 + 2K^2 - 8) = -2K^2 + K + 15$

Si $-2K^2 + K + 15 = 0 \Rightarrow 2K^2 - K - 15 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow K = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+120}}{4} = \dfrac{1 \pm 11}{4} = \begin{cases} 3 \\ -5/2 \end{cases}$

Si $K = 3$ o $K = -5/2$ Rango $a = 2$

Si $K \neq 3$ y $K \neq -5/2$ Rango $a = 3$

Como el sistema es homogeneo el rango de A y el de $\bar{A}$ son el mismo, por tanto, por el teorema de Rouche-Frobenius

Si $K = 3$ o $K = -5/2$

Rango A = Rango $\bar{A}$ < nº incógnitas $\Rightarrow$ SCI, es decir, con solución distinta de la trivial

b/ Para $K = 3$ el sist. es comp. indet.

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 2z &= 0 \\ x - 4y + 3z &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{2Ec2 - Ec1} \left.\begin{aligned} 2x - y + 2z &= 0 \\ -7y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$y = \lambda \Rightarrow z = -7\lambda \Rightarrow x = \frac{1}{2}(-7\lambda - 2\lambda) = \frac{-9\lambda}{2}$

Solución $(x, y, z) = \left(\frac{-9\lambda}{2}, \lambda, -7\lambda\right)$

2º $X \cdot A = B^2 + C$. Si encuentro A^{-1} tengo que

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = (B^2 + C) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = (B^2 + C) \cdot A^{-1}$$

Calculo A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, A^{-1}$$

$$(Adj) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{(Adj)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$X = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3º
$$\left.\begin{array}{l} -x + y \leq 60 \\ x + y \geq -40 \\ 11x + 3y \leq 40 \end{array}\right\}$$

Represento las rectas.

(1) $-x + y = 60$

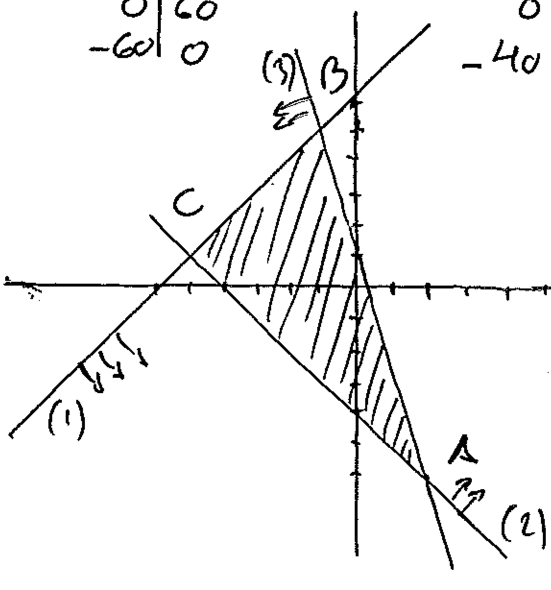
x	y
0	60
-60	0

(2) $x + y = -40$

x	y
0	-40
-40	0

(3) $11x + 3y = 40$

x	y
0	$40/3$
$\frac{40}{11}$	0



Calculo los vértices

A $(2)\cap(3)$ B $(1)\cap(3)$ C $(1)\cap(2)$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=40 \\ 11x+3y=40 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -x+y=60 \\ 11x+3y=40 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -x+y=60 \\ x+y=-40 \end{array}\right\}$$

$$(x,y)=(20,-60) \quad (x,y)=(-10,50) \quad (x,y)=(-50,10)$$

Evalúo

a/ $f(x,y)=10x-y$

A $f(20,-60)=80$

B $f(-10,50)=-150$

C $f(-50,10)=-510$

el máximo se alcanza en $(20,-60)$

b/ $f(x,y)=x-10y$

A $f(20,-60)=80$

B $f(-10,50)=-510$

C $f(-50,10)=-150$

el mínimo se alcanza en $(20,-60)$

4°

$x \equiv$ número de árboles A1

$y \equiv$ " " " A2

	MANUAL	MÁQUINA
A1	$\frac{1}{3}x$	$\frac{1}{3}x$
A2	$\frac{1}{2}y$	$\frac{1}{6}y$

Ojo con pasar todo a horas.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y \leq 100 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{6}y \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y \leq 600 \\ 2x+y \leq 480 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La función de ganancias es

$G(x,y)=15x+10y$

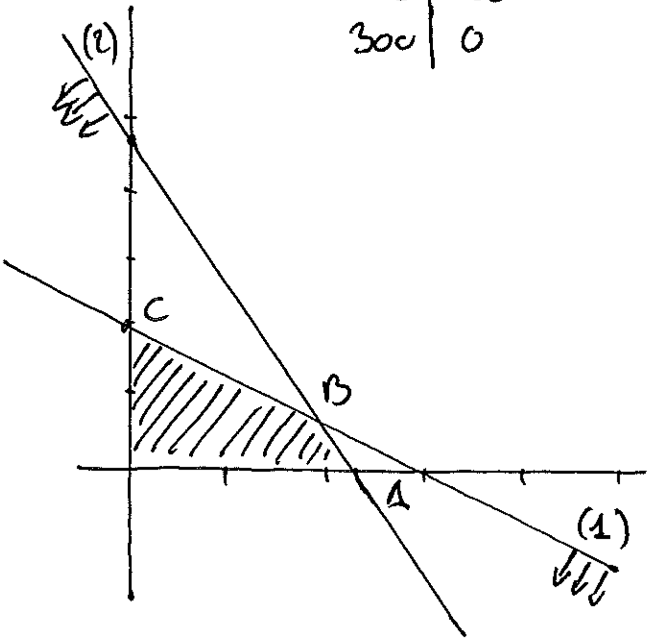
Represento

(1) $2x + 3y = 600$

x	y
0	200
300	0

(2) $2x + y = 480$

x	y
0	480
240	0



Calculo los vértices

A $(240, 0)$

B $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=600 \\ 2x+y=480 \end{array}\right\}$

$2y = 120$

$y = 60 \Rightarrow x = 210$

$(210, 60)$

C $(0, 200)$

Evalúo

A $G(240,0) = 15 \cdot 240 = 3600$

B $G(210,60) = 15 \cdot 210 + 10 \cdot 60 = 3750$

C $G(0,200) = 10 \cdot 200 = 2000$

Por tanto la ganancia máxima se alcanza fabricando 210 árboles A1 y 60 A2, y asciende a 3750 euros.

(5)

$x \equiv$ cantidad de alimento A

$y \equiv$ " " " B

	N_1	N_2	N_3
A	$2x$	x	x
B	y	$3y$	$2y$
	4	6	5

Planteo las restricciones.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y \geq 4 \\ x+3y \geq 6 \\ x+2y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La función que da los gastos es:

$$G(x,y) = x + 2'4\,y$$

Represento

(1) $2x+y=4$

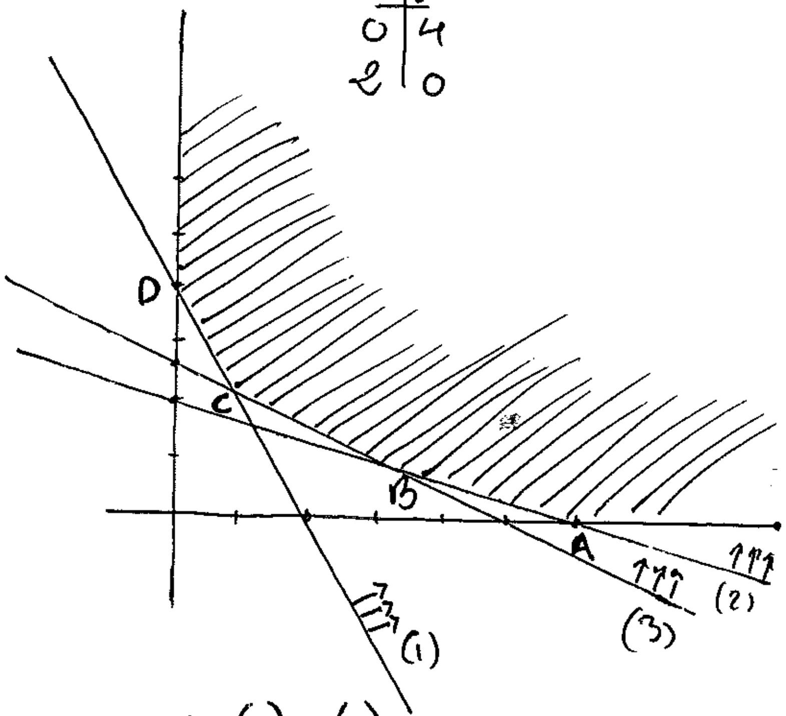
x	y
0	4
2	0

(2) $x+3y=6$

x	y
0	2
6	0

(3) $x+2y=5$

x	y
0	2'5
5	0



Calculo los vértices

A $(6,0)$

B $(2) \cap (3)$

$$\left.\begin{array}{r} x+3y=6 \\ x+2y=5 \end{array}\right\}$$

$y = 1 \Rightarrow x = 3$

$(3,1)$

C $(1)\cap(3)$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=4 \\ x+2y=5 \end{array}\right\} \quad (1,2)$$

$3y = 6 \quad y = 2 \Rightarrow x = 1$

D $(0,4)$

Evalúo

A $G(6,0) = 6$

B $G(3,1) = 3 + 2'4 = 5'4$

C $G(1,2) = 1 + 2'4 \cdot 2 = 5'8$

D $G(0,4) = 2'4 \cdot 4 = 9'6$

Por tanto el gasto mínimo se produce consumiendo 3 unidades de A y 1 de B

(5/5)