CONTROL INICIAL 2ºC MAT. APLIC. II

SOLUCIÓN 14-10-10

Salvo error u omisión

① Llamo $x =$ nº monedas en caja A
$y =$ " " " " B
$z =$ " " " " C

Planteo el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=36 \\ x-2=y+z \\ x+1=2(y-1) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=36 \\ x-y-z=2 \\ x-2y=-3 \end{array}\right\}$$

Resuelvo por Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -2 & -2 & -34 \\ 0 & -3 & -1 & -39 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_3-3F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -2 & -2 & -34 \\ 0 & 0 & 4 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3/4]{-F_2/2} \left.\begin{array}{r} x+y+z=36 \\ x+y=17 \\ z=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z=6 \\ y=11 \\ x=19 \end{array}$$

Por tanto las cajas tenían 19, 11 y 6 monedas respectivamente

② Sea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, debe cumplirse que

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & 21 \\ 69 & 59 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+4c & 3b+4d \\ 7a+11c & 7b+11d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & 21 \\ 69 & 59 \end{pmatrix}$$

Por tanto obtengo los sistemas

$$\left.\begin{array}{l} 3a+4c=26 \\ 7a+11c=69 \end{array}\right\} \quad y \quad \left.\begin{array}{l} 3b+4d=21 \\ 7b+11d=59 \end{array}\right\}$$

Resolviéndolos por sustitución tengo que:

$$a=\frac{26-4c}{3} \qquad\qquad b=\frac{21-4d}{3}$$

$$7\left(\frac{26-4c}{3}\right)+11c=69 \qquad\qquad 7\left(\frac{21-4d}{3}\right)+11d=59$$

$$182-28c+33c=207 \qquad\qquad 147-28d+33d=177$$

$$5c=25 \qquad\qquad 5d=30$$

$$c=5 \Rightarrow a=2 \qquad\qquad d=6 \Rightarrow b=-1$$

y $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

(3°) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculo $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^2\cdot A^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, y a falta de aplicar el método de inducción, deduzco que

$$A^n=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

(4°) Resuelvo

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2-a & -1 \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

De esta igualdad obtengo las ecuaciones

$a^2-a=12$ y $a^2+a=20$

$a^2-a-12=0$ $\qquad$ $a^2+a-20=0$

$a=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}$ $\qquad$ $a=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\frac{-1\pm 9}{2}$

$\Rightarrow a=4$ ó $a=-3$ $\qquad$ $\Rightarrow a=4$ ó $a=-5$

Por tanto la única solución es $a=4$

(5°)
$$\left.\begin{aligned} x-2y-z&=-11 \\ y+z&=-20 \\ x-3y-2z&=9 \end{aligned}\right\}$$

Resuelvo por Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & -20 \\ 1 & -3 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & -20 \\ 0 & -1 & -1 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left.\begin{aligned} x-2y-z&=-11 \\ x+z&=-20 \end{aligned}\right\}$$

Se trata de un sistema compatible indeterminado. Geométricamente se interpreta como tres planos que se cortan en la misma recta.

Resuelvo

$z = \lambda \Rightarrow y = -20 - \lambda \Rightarrow x = 2y + z - 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2(-20-\lambda) + \lambda - 11 = -40 - 2\lambda + \lambda - 11 = -\lambda - 51$

Solución

$(x, y, z) = (-\lambda - 51, -20 - \lambda, \lambda) \; / \; \lambda \in \mathbb{R}$