EXAMEN 2ºA MAT. APLIC. II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión 13-11-08

① Sean $x \equiv$ nº casas tipo A
$y \equiv$ " " " B
$z \equiv$ " " " C

Hago una tabla

H. / CASAS		ALB	FON	ELE
A	x	10x	2x	2x
B	y	15y	4y	3y
C	z	20z	6z	5z
TOTAL		270	68	58

Por tanto obtengo las siguientes ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10x + 15y + 20z = 270 \\ 2x + 4y + 6z = 68 \\ 2x + 3y + 5z = 58 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 54 \\ x + 2y + 3z = 34 \\ 2x + 3y + 5z = 58 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2Ec2 - Ec1 \\ \longrightarrow \\ Ec3 - Ec1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y + 4z = 54 \\ y + 2z = 14 \\ z = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z = 4 \\ y = 14 - 8 = 6 \\ x = \dfrac{54 - 18 - 16}{2} = 10 \end{array}$$

Por ~~tanto~~ se fabrican 10 casas tipo A, 6 tipo B y 4 tipo C

② a/ $M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$

$$N = B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b/ $P = N - I = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Calculo $|P| = 30 + 12 + 12 - (18 + 24 + 10) = 2$

Calculo la matriz de los adjuntos

$$(Adj) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{(Adj)^t}{|P|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -3/2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

c/ Resuelvo $PX = D$

Como conozco P^{-1} tengo que $P^{-1} \cdot P \cdot X = P^{-1} \cdot D \Rightarrow$

$\Rightarrow I \cdot X = P^{-1} \cdot D \Rightarrow X = P^{-1} \cdot D$ Es decir

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -3/2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ -8+4 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3º

$$\begin{pmatrix} 2 & -a & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

Discuto por Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a \end{array}\right) \xrightarrow{2F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 2-a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & a \end{array}\right) \xrightarrow{(2-a)F_3 - F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 2-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2+2a-1 & -a^2+2a-1 \end{array}\right)$$

Es decir, si $-a^2+2a-1=0 \Rightarrow a^2-2a+1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$ tengo que la última fila es nula y por tanto el sistema es compatible indet.

Si $a \neq 1$ el sistema será comp. det.

El sistema tendrá más de una solución cuando $a=1$, en este caso tengo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y+z=1 \\ y+z=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z=\lambda \\ y=1-\lambda \end{array}$$

$2x = 1+y-z \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 1+1-\lambda-\lambda = 2-2\lambda \Rightarrow x = 1-\lambda$

Solución $(x,y,z) = (1-\lambda, 1-\lambda, \lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

4)

$$\begin{vmatrix} 2p & 2q & 2r \\ 2a & 2b & 2c \\ 2u & 2v & 2w \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 2\cdot 2\cdot 2 \begin{vmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ u & v & w \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} \underset{(3)}{=}$$

$= -8 \cdot 25 = -200$

(1) Si una fila está multiplicada por un número el det. queda multiplicado por dicho número

(2) Si permuto dos filas el det. cambia de signo

(3) Por hipótesis

5º
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 6 & a-2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{4F_3-3F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 4a+7 & 23 \end{array}\right)$$

Es decir, si $4a+7=0 \Rightarrow a=-7/4$ tendría $0=23$ y el sistema sería incompatible

Si $a \neq -7/4$ será compatible determinado.

Resuelvo para $a=4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 23 & 23 \end{array}\right) \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ 8y-5z=3 \\ 23z=23 \end{array}\right\} \Rightarrow z=1$$

$$\Rightarrow 8y-5=3 \Rightarrow y=1$$

$$x = 2y - z = 2-1 = 1$$

Solución $(x,y,z)=(1,1,1)$

6º Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Tengo $\left.\begin{array}{r} 3x-2y=A \\ x-6y=B \end{array}\right\}$

$$\begin{array}{lr} Ec1 & 3x-2y=A \\ 3Ec2 & 3x-18y=3B \\ \hline & 16y=A-3B \\ & y=\frac{1}{16}(A-3B) \end{array} \qquad \begin{array}{lr} 3Ec1 & 9x-6y=3A \\ Ec2 & x-6y=B \\ \hline & 8x=3A-B \\ & x=\frac{1}{8}(3A-B) \end{array}$$

$$x=\frac{1}{8}\left(3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)=\frac{1}{8}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/8 & -1/8 \\ 5/8 & -3/8 \end{pmatrix}$$

$$y=\frac{1}{16}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/16 & -3/16 \\ -1/16 & -1/16 \end{pmatrix}$$