EXAMEN 2º A MAT. APLIC CCSS II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión 11-12-08

①

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Veo Rango A

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A \geq 2$$

$$|A| = 2a - (a+1+2a) = 2a - a - 1 - 2a = -a-1$$

Es decir, si $-a-1=0 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow$ Rango $A = 2$

si $a \neq -1 \Rightarrow$ Rango $A = 3$

Veo Rango $\bar{A}$

Si $a \neq -1 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Si $a=-1$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se ve que Rango $\bar{A} = 2$ porque $F_2 = F_3$

Por el Teorema de Rouche - Frobenius

Si $a \neq -1 \Rightarrow$ Rango A = Rango $\bar{A}$ = nº incog $\Rightarrow$ SCD

Si $a = -1 \Rightarrow$ Rango A = Rango $\bar{A}$ < nº incog $\Rightarrow$ SCI

Resuelvo

Si $a=-1$ el sistema es comp. indeterminado. Elimino la segunda ecuación

$$\left.\begin{aligned} -x + y &= -1 \\ 2y + z &= 2 \end{aligned}\right\} \quad z=\lambda \Rightarrow y = \frac{2-\lambda}{2} \Rightarrow x = y+1$$

$$\Rightarrow x = \frac{2-\lambda}{2} + 1 = \frac{4-\lambda}{2}$$

$$(x,y,z) = \left(\frac{4-\lambda}{2}, \frac{2-\lambda}{2}, \lambda\right) \Big/ \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $a \neq -1$ el sist. es compat. determinado y resuelvo por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2a+2-a-3-2a}{-a-1} = \frac{-a-1}{-a-1} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a+1 & a+3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^2+3a-a^2-a-2a}{-a-1} = \frac{0}{-a-1} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a+1 & 2 & a+3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-a-1} = \frac{4a+2a^2+2a-2a-2-2a^2-6a}{-a-1} = \frac{-2a-2}{-a-1} = 2$$

Soluc $(x,y,z) = (1, 0, 2)$

2°
$$\begin{pmatrix} 2 & a & 4 \\ a & 2 & 6 \\ 4 & 2a & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

Veo Rango A

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 20-16 = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A \geq 2$$

$$|A| = 40 + 8a^2 + 24a - (32 + 10a^2 + 24a) = 40 + 8a^2 + \cancel{24a} - 32 - 10a^2 - \cancel{24a}$$
$$= -2a^2 + 8$$

Si $-2a^2+8=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a = \pm 2 \Rightarrow$ Rango $A = 2$

Si $a \neq \pm 2 \Rightarrow$ Rango $A = 3$

Veo Rango $\bar{A}$

Si $a \neq \pm 2 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Si $a = 2$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Sé que C_1 y C_3 son l. indep.
Veo qué ocurre con C_4

(2/5)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 4 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 24+40-48-16 = 64-64 = 0 \Rightarrow \text{Rango } \bar{A} = 2$$

Si $a = -2$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & -4 & 10 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 4 & 10 & -2 \end{vmatrix} = -24-40-48-16 = -128 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Por el teorema de Rouche - Frobenius.

Si $a \neq \pm 2 \Rightarrow$ Rango A = Rango $\bar{A}$ = nº incog $\Rightarrow$ SCD

Si $a = 2 \Rightarrow$ Rango A = Rango $\bar{A}$ < nº incog $\Rightarrow$ SCI

Si $a = -2 \Rightarrow$ Rango A < Rango $\bar{A} \Rightarrow$ SIncomp.

Resuelvo cuando $a = +2$ elimino F_2 pues F_1 y F_3 son independientes

$$\left.\begin{aligned} 2x+2y+4z &= 2 \\ 4x+4y+10z &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+2z &= 1 \\ 2x+2y+5z &= 2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{F_2 - 2F_1}$$

$$\left.\begin{aligned} x+y+2z &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z = 0 \,,\quad y = \lambda \,,\quad x = 1-\lambda$$

$$(x,y,z) = (1-\lambda, \lambda, 0) \;/\; \lambda \in \mathbb{R}$$

3º $x \equiv$ cantidad invertida en acciones A

$y \equiv$ " " " " B

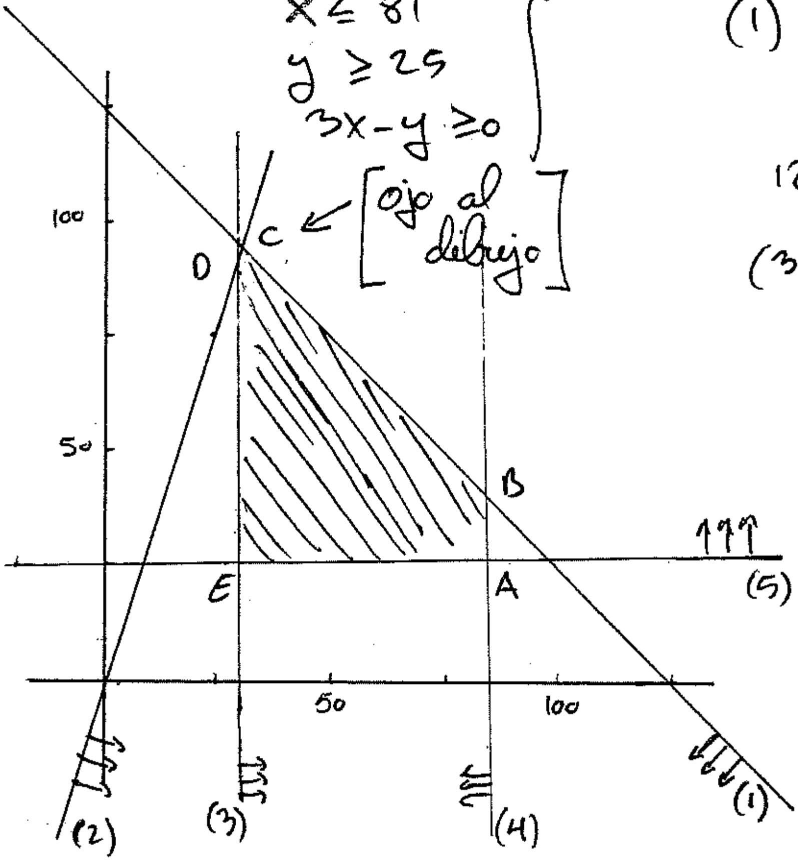
$$\left.\begin{aligned} x+y &\leq 125000 \\ x &\geq 30000 \\ x &\leq 81000 \\ y &\geq 25000 \\ 3x &\geq y \end{aligned}\right\}$$

NOTA: en este caso $x \geq 0$ $y \geq 0$ no son necesarias puesto que $x \geq 30000$ $y \geq 25000$

La función de ganancias viene dada por $f(x,y) = 0'1x + 0'05y$

Trabajaré en miles de euros, las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 125 \\ x\geq 30 \\ x\leq 81 \\ y\geq 25 \\ 3x-y\geq 0 \end{array}\right\}$$



Represento las rectas

(1) $x+y=125$

x	y
0	125
125	0

(2) $3x-y=0$

x	y
0	0
25	75

(3) $x=30$ (4) $x=81$ (5) $y=25$

Calculo los vértices

A = $(81,25)$

B: $(4)\cap(1)$

$$\left.\begin{array}{l} x=81 \\ x+y=125 \end{array}\right\}\Rightarrow y=125-81=44$$

$(81,44)$

C = $(1)\cap(2)$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=125 \\ 3x-y=0 \end{array}\right\}$$

$4x=125$

$x=\frac{125}{4}=31'25$

$y=3x=93'75$

D $(2)\cap(3)$

$$\left.\begin{array}{l} x=30 \\ 3x-y=0 \end{array}\right\}$$

$(30,90)$

E $(30,25)$

Evalúo los vértices

A $f(81,25)=81\cdot 0'1+25\cdot 0'05=9'35$

B $f(81,44)=10'3$

C $f(31'25,93'75)=7'8125$

D $f(30,90)=7'5$

E $f(30,25)=4'25$

Las ganancias máximas se alcanzan invirtiendo 81000 € en acciones A y 44000 € en B, con un beneficio de 10300 €

(4/5)

(4°) $x \equiv$ nº lotes oferta A
$y \equiv$ nº lotes oferta B

	camisa	pant
A	1	1
B	3	1

$$\left.\begin{array}{l} x+3y \leq 200 \\ x+y \leq 100 \\ x \geq 20 \\ y \geq 10 \end{array}\right\}$$

la función de ganancia será
$f(x,y) = 30x + 50y$

Doy valores a las rectas

(1) $x+3y = 200$

x	y
0	$\frac{200}{3} \simeq 66'6$
200	0

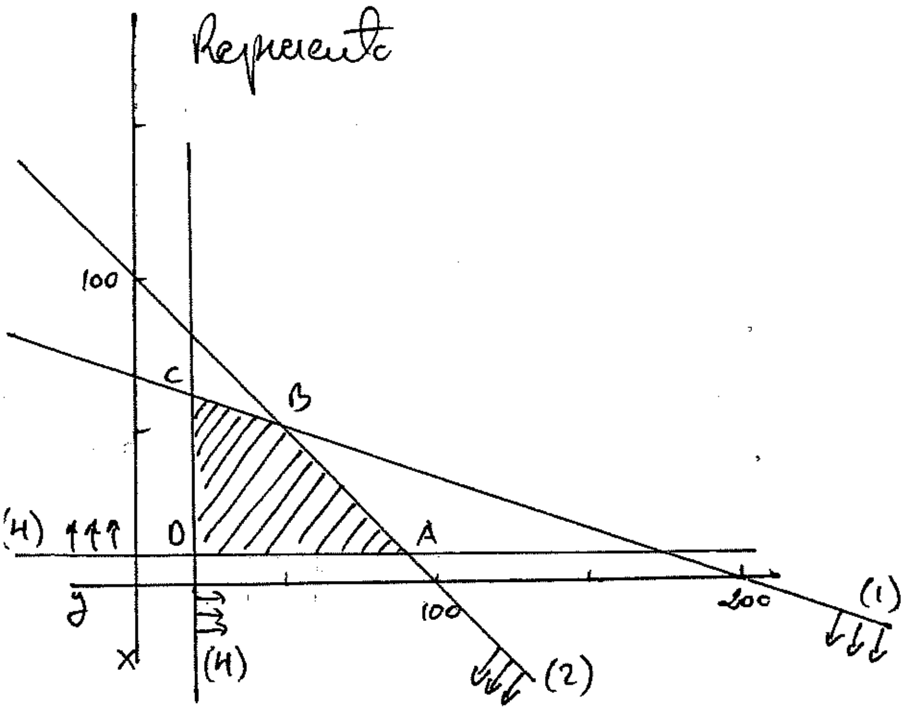
(2) $x+y = 100$

x	y
0	100
100	0

(3) $x=20$

(4) $y=10$

Represento



Calculo los vértices

A = (2) ∩ (4)
$\left.\begin{array}{l} x+y=100 \\ y=10 \end{array}\right\}$ (90,10)

B = (1) ∩ (2)
$x+3y = 200$
$x+y = 100$
$2y = 100 \Rightarrow y=50$
$x=50$ (50,50)

C = (1) ∩ (3)
$\left.\begin{array}{l} x+3y=200 \\ x=20 \end{array}\right\} \Rightarrow y=60$
(20,60)

D = (3) ∩ (4)
$\left.\begin{array}{l} x=20 \\ y=10 \end{array}\right\}$ (20,10)

Evalúo los vértices

A; $f(90,10) = 30 \cdot 90 + 10 \cdot 50 = 3200$
B; $f(50,50) = 30 \cdot 50 + 50 \cdot 50 = 4000$
C; $f(20,60) = 30 \cdot 20 + 50 \cdot 60 = 3600$
D; $f(20,10) = 30 \cdot 20 + 50 \cdot 10 = 1100$

Por tanto el máximo beneficio se alcanza con 50 lotes de cada tipo

(5/5)