EXAMEN 2°C MAT. APLIC. II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión. 11-11-10

(1°) Sean $x \equiv$ precio de la mochila
$y \equiv$ precio del bolígrafo
$z \equiv$ " " libro

Tengo las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=48 \\ \frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{7}&=8 \\ x&=y+z \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z&=48 \\ 7x+14y+6z&=336 \\ x-y-z&=0 \end{aligned}\right\}$$

Resuelvo por Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 48 \\ 7 & 14 & 6 & 336 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-7F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 48 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -48 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2/2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 48 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow{7F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 48 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 168 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=48 \\ 7y-z&=0 \\ 8z&=168 \end{aligned}\right\} \rightarrow z=\frac{168}{8}=21 \rightarrow y=\frac{z}{7}=\frac{21}{7}=3 \rightarrow$$

$$\rightarrow x=48-y-z=48-21-3=24$$

Por tanto la mochila cuesta 24 euros, el bolígrafo 3 y el libro 21 euros.

(2°) Sea $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tengo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 4a+2c & 4b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b & 2b \\ c+4d & 2d \end{pmatrix}$$ y obtengo

$$\left.\begin{array}{l} a = a+4b \\ b = 2b \\ 4a+2c = c+4d \\ 4b+2d = 2d \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} 4b=0 \\ b=0 \\ 4a+c-4d=0 \\ b=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} b=0 \\ 4a+c-4d=0 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} b=0 \\ c=4d-4a \end{array}$$ y por tanto

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 4d-4a & d \end{pmatrix} \; / \; a \in \mathbb{R} \text{ y } d \in \mathbb{R}$$

3º a/ Para que A no tenga inversa su determinante debe ser cero

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -a^2+6-(1) = -a^2+5$$

Si $-a^2+5=0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{5}$ A no tendrá inversa

b/ Si $a=2$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

$|A| = -2^2+5 = 1$

Calculo la matriz de los adjuntos

$$(\text{Adj}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ -5 & -2 & 12 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

y tengo que

$$A^{-1} = \frac{(Adj)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

c/ Si $AX = B$, como conozco A^{-1} tengo que

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$, por tanto

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-5+2 \\ 2-2+1 \\ -12+12-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

4º

$$\begin{pmatrix} 1 & K & 1 \\ 0 & 2 & K \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a/ Calculo Rango de A

$A = \begin{pmatrix} 1 & K & 1 \\ 0 & 2 & K \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Como $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ Rango $A \geq 2$

$|A| = 2 + K^2 - (2+K) = K^2 - K$

Si $K^2 - K = 0 \Rightarrow K(K-1) = 0 \Rightarrow K = 0$ ó $K = -1$ Rango $A = 2$

Si $K \neq 0$ y $K \neq -1 \Rightarrow$ Rango $A = 3$

Calculo Rango de $\bar{A}$

Si $K \neq 0$ y $K \neq -1 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Si $K = 0$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Veo el determinante formado por $C_1 C_2$ y C_4

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Si $K = 1$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ En este caso el determinante es $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 2$

Por el teorema de Rouche - Frobenius

Si $K \neq 0$ y $K \neq 1$

Rango A = Rango $\bar{A}$ = nº incog $\Rightarrow$ S. C. Determ.

Si $K = 0$

Rango A < Rango $\bar{A}$ $\Rightarrow$ S. Incomp.

Si $K = 1$

Rango A = Rango $\bar{A}$ < nº incog $\Rightarrow$ S C. Indet.

b/ El sistema tiene infinitas soluciones para $K=1$

Por tanto resuelvo

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1 \\ 2y+z&=2 \\ \cancel{x+y+z}&\cancel{=1} \end{aligned}\right\} \quad \text{Sea } y=\lambda \Rightarrow z = 2-2\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1-\lambda-(2-2\lambda) = \lambda-1$$

Solución $(x,y,z) = (\lambda-1, \lambda, 2-2\lambda) \; / \lambda \in \mathbb{R}$

c/ Para $K = 3$ aplico el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x+3y+z&=1 \\ 2y+3z&=2 \\ -2y&=0 \end{aligned}\right\} \rightarrow y=0 \Rightarrow z=\frac{2}{3} \Rightarrow x = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Solución: $(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$

5º El sistema dado equivale a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 7a \end{pmatrix}$$

a/ Calculo Rango A

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 1 & -4 & a\end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-5\neq 0 \Rightarrow$ Rango $A\geq 2$

$|A|=-3a+10-(-5+2a)=-5a+15$

Si $-5a+15=0 \Rightarrow a=3$ Rango $A=2$

Si $a\neq 3$ Rango $A=3$

Estudio Rango de $\bar{A}$

Si $a\neq 3$ Rango $\bar{A}=3$

Si $a=3$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 2 & 22\\ 1 & -4 & 3 & 21\end{pmatrix}$$

Veo el determ. formado por C_1, C_2 y C_4

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 22\\ 1 & -4 & 21\end{vmatrix}=-63-8+22-(-3+42-88)=-49+49=0$$

y Rango $\bar{A}=2$

Por el teorema de Rouche-Frobenius

Si $a\neq 3$

Rango A = Rango $\bar{A}$ = nº incog $\Rightarrow$ S.C. Det.

Si $a=3$

Rango A = Rango $\bar{A}$ < nº incog $\Rightarrow$ S.C. Indet.

b/ Resuelvo cuando $a=3$

$$\left.\begin{array}{r}x+y-z=1\\ 2x-3y+2z=22\end{array}\right\} \xrightarrow{Ec2-2Ec1} \left.\begin{array}{r}x+y-z=1\\ -5y+4z=20\end{array}\right\}$$

$z=\lambda \Rightarrow y=\dfrac{4\lambda-20}{5} \Rightarrow x=1+\lambda-\dfrac{4\lambda-20}{5}=$

$=\dfrac{5+5\lambda-4\lambda+20}{5}=\dfrac{\lambda+25}{5}$

Solución $(x,y,z)=\left(\dfrac{\lambda+25}{5}, \dfrac{4\lambda-20}{5}, \lambda\right) / \lambda\in\mathbb{R}$

c/ Si $a=0$ Resuelvo por Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 2 & 22\\ 1 & -4 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 4 & 20\\ 0 & -5 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & -3 & -21 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ -5y+4z=20 \\ -3z=-21 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow z=\frac{-21}{-3}=7 \Rightarrow y=\frac{4z-20}{5}=\frac{4\cdot 7-20}{5}=\frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow x=1-y+z=1-\frac{8}{5}+7=8-\frac{8}{5}=\frac{32}{5}$$

Solución $(x,y,z)=\left(\frac{32}{5},\frac{8}{5},7\right)$