EXAMEN 2ºA MAT. APLIC. II

SOLUCIÓN Salvo error u omisión 10-11-09

① Sean $x \equiv$ precio localidad de fondo
$y \equiv$ " " general
$z \equiv$ " " tribuna

Tengo que

$$\left.\begin{array}{l} \frac{z}{y} = \frac{19}{18} \\ \frac{y}{x} = \frac{6}{5} \\ x+y+z=52 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 19y-18z=0 \\ 6x-5y=0 \\ x+y+z=52 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=52 \\ 6x-5y=0 \\ 19y-18z=0 \end{array}\right\} \xRightarrow{Ec2-6Ec1} \left.\begin{array}{l} x+y+z=52 \\ -11y-6z=-312 \\ 19y-18z=0 \end{array}\right\}$$

$$\xRightarrow{11Ec3+19Ec2} \left.\begin{array}{l} x+y+z=52 \\ -11y-6z=-312 \\ -312z=-5928 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{5928}{312}=19$$

$$\Rightarrow y=\frac{6\cdot 19-312}{-11}=18 \quad \Rightarrow x=52-19-18=15$$

Los precios son 15 € la butaca de fondo, 18 la general y 19 € la tribuna

② Calculo $x^2-x=\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a^2-a & -1 \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Obtengo las siguientes ecuaciones

$a^2 - a = 12$
$a^2 + a = 20$

Resuelvo

$a^2 - a - 12 = 0$

$a = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \nearrow 4 \\ \searrow -3 \end{cases}$, por otro lado

$a^2 + a - 20 = 0$

$a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \dfrac{-1 \pm 9}{2} = \begin{cases} \nearrow 4 \\ \searrow -5 \end{cases}$

Por tanto el valor para el que se cumplen ambas condiciones es $a = 4$

3º

$$\left.\begin{matrix} X - 2Y = M \\ 3X - 4Y = N \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3X - 6Y = 3M \\ 3X - 4y = N \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} 2X - 4Y = 2M \\ 3X - 4Y = N \end{matrix}\right\}$$

$$2Y = N - 3M \qquad X = N - 2M$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -15 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -15/2 \\ 3 & -9/2 \end{pmatrix}$$

4º

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/7 & 4/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y observo que en general tendré

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{7} & \frac{n}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ faltaría demostrarlo por inducción, pero...

(5º) $$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 0$$

(1) si a una fila le sumo un múltiplo de otra el determinante no varía $(F_3 + F_2)$

(2) si hay dos filas proporcionales el determinante es cero $\left(F_1 = \frac{5}{a+b+c} \cdot F_3\right)$

(6º) $$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a/ Para que A tenga inversa debe cumplirse $|A| = 0$

$|A| = x + 3x - 3x = x$

Por tanto si $x \neq 0$ A tiene inversa.

b/ Para $x = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ sé que $|A| = 2$

Calculo la matriz de los adjuntos

$$(Adj) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

y tengo que

$$A^{-1} = \frac{(Adj)^t}{|A|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7º $\begin{pmatrix} K & 1 & 1 \\ 1 & -K & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Veo el Rango de A; como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango} A \geq 2$

$|A| = -K^2 - 1 + 2K - 1 + K = -K^2 + 3K - 2$

Igualo a cero $-K^2 + 3K - 2 = 0 \Rightarrow K^2 - 3K + 2 = 0$

$$K = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

Si $K \neq 2$ y $K \neq 1 \Rightarrow$ Rango $A = 3$

Si $K = 2$ ó $K = 1 \Rightarrow$ Rango $A = 2$

Como el sistema es homogéneo sé que Rango A = Rango $\bar{A}$, por tanto, por el Teorema de Rouche-Frobenius

Si $K \neq 2$ y $K \neq 1$

Rango A = Rango $\bar{A}$ = nº incog $\Rightarrow$ S. Comp. Det.

Si $K = 2$ ó $K = 1$

Rango A = Rango $\bar{A}$ < nº incog $\Rightarrow$ S. Comp. Indet.

Resuelvo

Si $K \neq 2$ y $K \neq 1$

$(x,y,z) = (0,0,0)$ solución trivial

Si $K=2$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=0 \\ x-2y-z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{2Ec2-Ec1} \left.\begin{array}{l} 2x-y+z=0 \\ -4y-3z=0 \end{array}\right\}$$

$z=\lambda \Rightarrow y=-\frac{3\lambda}{4} \Rightarrow x=\frac{-3\lambda}{4}-\lambda=\frac{-7\lambda}{4}$

$(x,y,z)=\left(\frac{-7\lambda}{4}, \frac{-3\lambda}{4}, \lambda\right) / \lambda \in \mathbb{R}$

Si $K=1$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{Ec2-Ec1} \left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ -2y-2z=0 \end{array}\right\}$$

$z=\lambda \Rightarrow y=-\lambda \Rightarrow x=0$

$(x,y,z)=(0,-\lambda,\lambda) / \lambda \in \mathbb{R}$

8º
$$\begin{pmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Veo Rango A

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow$ Rango $A \geq 2$ (C_2 y C_3 l. indep)

$|A| = -\lambda^2+1+3\lambda-\lambda+3-\lambda^2 = -2\lambda^2+2\lambda+4$

Igualo a cero $-2\lambda^2+2\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-2=0$

$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow -1 \end{array}$

Si $\lambda=2$ ó $\lambda=-1 \Rightarrow$ Rango $A=2$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -1 \Rightarrow$ Rango $A=3$

Veo rango de $\bar{A}$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -1 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Si $\lambda = 2$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Veo el determ. formado por C_2, C_3 y C_4

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6-4+1-4-2+3 = 0 \Rightarrow \text{Rango } \bar{A} = 2$$

Si $\lambda = -1$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Veo el mismo determ. que antes.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3-1+1-1+1+3 = 0 \Rightarrow \text{Rango } \bar{A} = 2$$

Por el Teorema de Rouche-Frobenius.

Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2$

Rango A = Rango $\bar{A}$ = nº incog $\Rightarrow$ S. Comp. Det.

Si $\lambda = -1$ ó $\lambda = 2$

Rango A = Rango $\bar{A}$ < nº incog $\Rightarrow$ S. Comp. Indet.

Resuelvo.

Si $\lambda = -1$

$$\left.\begin{aligned} -x+3y+z &= -1 \\ x-y-z &= 1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{Ec2+Ec1} \left.\begin{aligned} -x+3y+z &= -1 \\ 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow x = \lambda + 1$

Soluc. $(x, y, z) = (\lambda+1, 0, \lambda) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}$

Si $\lambda = 2$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{Ec2 - Ec1} \left.\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 1 \\ \quad -y - 3z = 0 \end{array}\right\}$$

$$z = \lambda \Rightarrow y = -3\lambda \Rightarrow x = 1 - 2(-3\lambda) - 2\lambda = 1 + 4\lambda$$

Soluc. $(x, y, z) = (1 + 4\lambda, -3\lambda, \lambda) \;/\; \lambda \in \mathbb{R}$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -1$, por la regla de Cramer tengo que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = \frac{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = 0 \quad (\text{porque } C_1 = C_2)$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 3 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = 0 \quad (\text{porque } C_1 = C_3)$$

Solución $(x, y, z) = (1, 0, 0)$