EXAMEN 2ºA MAT. APLIC. CCSS II

SOLUCIÓN (Salvo error u omisión) 7-11-06

(1º) Sean x, y, z el nº de monedas que hay en las cajas A, B y C respectivamente

en ~~total~~ 36 € $\Rightarrow x+y+z=36$

nº monedas A excede en 2 al de B y C

$$x-2 = y+z \Rightarrow x-y-z=2$$

una pasa de A a B, A tiene doble que B

$$x-1 = 2(y+1) \Rightarrow x-2y=3$$

Por ~~tanto~~, y resolviendo por Gauss

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=36 \\ x-y-z=2 \\ x-2y=3 \end{array}\right\} \xrightarrow[Ec3-Ec1]{Ec2-Ec1} \left.\begin{array}{l} x+y+z=36 \\ -2y-2z=-34 \\ -3y-z=-33 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{2Ec3-3Ec2} \left.\begin{array}{l} x+y+z=36 \\ -2y-2z=-34 \\ 4z=36 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow y=\frac{-34+18}{-2}=8 \\ \rightarrow z=9 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow x=36-8-9=19$$

Hay 19, 8 y 9 monedas en las cajas A, B y C

(2º) a/ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=3+2y \\ 3x+2y=3y-2 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-3y=3 \\ 3x-y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow x=3+3y \Rightarrow 3(3+3y)-y=-2$$

$$\Rightarrow 9+9y-y=-2 \Rightarrow 8y=-11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{-11}{8} \Rightarrow x=3+3\left(\frac{-11}{8}\right)=3-\frac{33}{8}=\frac{24-33}{8}=-\frac{9}{8}$$

por tanto $X = -\frac{9}{8}$ e $y = \frac{-11}{8}$

b/
$$\left.\begin{aligned} 5x + 3y &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3x + 2y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$3Ec1 - 5Ec2$

$$\left.\begin{aligned} 15x + 9y &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -12 & 45 \end{pmatrix} \\ -15x - 10y &= \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 10 & -45 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$-y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$2Ec1 - 3Ec2$

$$\begin{aligned} 10x + 6y &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix} \\ -9x - 6y &= \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 6 & -27 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

3º a/
$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} x & x & x+2 \\ x & x & x+4 \\ x & x & x+6 \end{vmatrix}}_{0\ (2)} + \begin{vmatrix} x & 1 & x+2 \\ x & 3 & x+4 \\ x & 5 & x+6 \end{vmatrix}$$

$$\underset{(1)}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ x & 3 & x \\ x & 5 & x \end{vmatrix}}_{0\ (2)} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 0$$

NOTA, se puede ver directamente que $F_3 = 2F_2 - F_1$ y aplicar (3)

(1) Si una fila o columna es suma de otras dos el determinante puede desdoblarse como suma de dos

(2) Si un determinante tiene dos filas iguales vale cero

(3) Se ve que $F_3 = 2F_2 - F_1$ y si en un determinante una fila o columna es combinación lineal de otras su valor es cero

b/
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculo la inversa de A. $|A| = -8+6-(-9+5) = -2+4 = 2$

$$\mathrm{Adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}^t}{|A|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -13 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/2 & 3/2 & 3/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 5/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

~~Por tanto~~ $X = A^{-1}(B - I) \Rightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} -13/2 & 3/2 & 3/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 5/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-52+9-3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-26-9+6}{2} \\ \frac{-4-3-1}{2} & -1/2 & \frac{-2-3+2}{2} \\ \frac{20-3+1}{2} & -1/2 & \frac{10+3-2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & \frac{3}{2} & -\frac{29}{2} \\ -4 & \frac{-1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 9 & \frac{-1}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

(4°) Calculo el Rango de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Rango $A \geq 2$ (C_1 y C_2 l. indep)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m + m - (1 + 2 + m^2) =$$
$$= -m^2 + 3m - 2$$

$$\Rightarrow -m^2 + 3m - 2 = 0 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

Si $m \neq 2$ y $m \neq 1 \Rightarrow$ Rango $A = 3$

Si $m = 2$ ó $m = 1 \Rightarrow$ Rango $A = 2$

Veo Rango de $\bar{A}$

Si $m \neq 2$ y $m \neq 1 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Si $m = 2$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } \bar{A} = 2$$
(hay tres columnas iguales)

Si $m = 1$

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_1+C_2 & \end{matrix} \end{array}$$

Veo el determinante formado por las columnas 1, 2 y 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } \bar{A} = 4$$

* Por el T de Rouche - Frobenius

Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$

Rango A = Rango $\bar{A}$ = nº incog $\Rightarrow$ SCD

Si $m = 2$

Rango A = Rango $\bar{A}$ < nº incog $\Rightarrow$ SCI (depende de 1 parámetro)

Si $m = 1$

Rango A < Rango $\bar{A}$ $\Rightarrow$ SI

(4/6)

5º $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m+1 \end{pmatrix}$

Veo el Rango de A

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Rango $A \geq 2$ (C_1 y C_3 l. indep)

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix} = m^2+1-(m+1) = m^2-m$

$m^2-m=0 \Rightarrow m(m-1)=0 \Rightarrow m=0 \quad m=1$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \Rightarrow$ Rango $A = 3$

Si $m=0$ ó $m=1 \Rightarrow$ Rango $A = 2$

Veo Rango de $\bar{A}$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Si $m = 0$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 2$ porque $(F_1 = F_3)$

Si $m = 1$

$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} C_1 & C_1+C_3 & C_3 & \end{array} \end{array}$ Veo el determinante formado por las columnas 1, 3 y 4

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-(1) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Por el T. de Rouche-Frobenius

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$

Rango A = Rango $\bar{A}$ = nº incog $\Rightarrow$ SCD

Si $m = 0$

Rango A = Rango $\bar{A}$ < nº incog $\Rightarrow$ SCI (dep 1 param)

Si $m = 1$

Rango $A <$ Rango $\bar{A}$ $\Rightarrow$ S I.

Resuelvo

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ Por la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ m+1 & m+1 & m \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m^2 + m + 1 - (m+1)}{m^2 - m} = \frac{m^2}{m^2 - m} = \frac{m}{m-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1-(m+1)}{m^2 - m} = \frac{-m}{m^2 - m} = \frac{-1}{m-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m(m+1) - m}{m^2 - m} = \frac{m^2}{m^2 - m} = \frac{m}{m-1}$$

Si $m = 0$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ z = 0 \\ \cancel{x + y = 1} \end{array}\right\} \quad \text{Sea } y = \lambda \Rightarrow x = 1 - \lambda$$

y la solución es $(x, y, z) = (1-\lambda, \lambda, 0) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}$