RECUPERACIÓN 1ª evaluación — 2º A — MAT. APLIC. CC.SS. II — 19-1-06

Soluciones salvo error u omisión

1º a/ Para que $AX = B$ tenga solución A debe tener inversa, es decir $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{tiene solución.}$$

Resuelvo

$$A^{-1} \cdot A X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Calculo A^{-1}. Sé que $|A| = 1$, veo la matriz de los adjuntos

$$Adj = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(Adj)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ y por tanto

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b/ $$X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \equiv A$

$|A| = -1 \Rightarrow \exists A^{-1}$.

$$Adj = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{(Adj)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

y por tanto como tengo

$$X \cdot A = B \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot \underset{\uparrow}{A^{-1}}$$

es decir (ojo con el orden)

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -23 & 14 \end{pmatrix}$$

2° a/ $\left.\begin{array}{l} 2A + 3B = C \\ A - B = C' \end{array}\right\}$ Donde $C = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculo A y B

$$-\ \begin{array}{l} 2A + 3B = C \\ 2A - 2B = 2C' \end{array} \qquad\qquad +\ \begin{array}{l} 2A + 3B = C \\ 3A - 3B = 3C' \end{array}$$

$$5B = C - 2C' \qquad\qquad 5A = C + 3C'$$

$$B = \frac{C - 2C'}{5} \Rightarrow \qquad\qquad A = \frac{C + 3C'}{5}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{5} = \frac{\begin{pmatrix} -10 & 5 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{5} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b/ $$A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 8 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 506 \\ 8 & 5 & 851 \\ 2 & 7 & 276 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 23 \cdot a \\ 8 & 5 & 23 \cdot b \\ 2 & 7 & 23 \cdot c \end{vmatrix}$$

$$= 23 \begin{vmatrix} 5 & 0 & a \\ 8 & 5 & b \\ 2 & 7 & c \end{vmatrix} = 23 \cdot d \Rightarrow \text{múltiplo de } 23$$

(1) $C_3 + 10C_2 + 100C_1$ (si a una columna le sumo un múltiplo de otra el det. no cambia)

(2) Por hipótesis

(3) si una columna está multiplicada por un nº, el nº sale fuera del determinante.

3º a/ $\begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m+1 \end{pmatrix}$

Veo Rango de A y de $\bar{A}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+m-m(m-1)-\left[1-m^2+m-1\right] =$$

$$= 1+\cancel{m}-\cancel{m^2}+m-\cancel{1}+\cancel{m^2}-\cancel{m}+\cancel{1} = 1+m$$

$\Rightarrow 1+m=0 \Rightarrow m=-1$

Si $m \neq -1 \Rightarrow$ Rango $A = 3 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Para $m=-1$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ Rango $A = 2$
(1ª y 2ª colum. son l. indep)

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$

$C_1 \quad C_2 \quad C_1+C_2$

$\Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Por el Teorema de Rouche-Frobenius

Si $m \neq -1$

Rango A = Rango $\bar{A} = 3 =$ nº incog $\Rightarrow$ S.C. Determ.

Si $m=-1$

Rango $A = 2 < 3 =$ Rango $\bar{A} \Rightarrow$ S Incomp.

Resuelvo para $m \neq -1$ por la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ m+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1+m-m(m+1)(m-1)-\left[m+1-m^2+m-1\right]}{1+m}$$

$$= \frac{1+\cancel{m}-m(m^2-1)-\cancel{m}-\cancel{1}+m^2-m+\cancel{1}}{1+m} = \frac{1-m^3+\cancel{m}+m^2-\cancel{m}}{1+m} =$$

$$= \frac{-m^3+m^2+1}{1+m}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & m-1 \\ 1 & m+1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m+m(m+1)+m-1-[m+m+(m+1)(m-1)]}{1+m}$$

$$= \frac{\cancel{m}+\cancel{m^2}+\cancel{m}+m-\cancel{1}-\cancel{m}-\cancel{m}-\cancel{m^2}+\cancel{1}}{1+m} = \frac{m}{1+m}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ m & 1 & m \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m+1+m-m^2-[1-m^2(m+1)+m]}{1+m} =$$

$$= \frac{\cancel{m}+\cancel{1}+m-\cancel{m^2}-\cancel{1}+m^3+\cancel{m^2}-\cancel{m}}{1+m} = \frac{m^3+m}{1+m}$$

b/
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ m \end{pmatrix}$$

Veo Rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A \geq 2$$

$$|A| = 5m^2+6+8-5-4m^2-12 = m^2-3$$

$\Rightarrow m^2-3=0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{3}$

Si $m \neq \pm\sqrt{3} \Rightarrow$ Rango $A = 3$

Si $m = \pm\sqrt{3} \Rightarrow$ Rango $A = 2$

Veo Rango de $\bar{A}$

Si $m \neq \pm\sqrt{3} \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Si $m=\sqrt{3}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$
$C_1 \quad C_2 \quad C_1+C_2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & \sqrt{3} \end{vmatrix} =$$
$$= 5\sqrt{3} \cancel{-6} -4+5-4\sqrt{3} \cancel{+6} =$$
$$= \sqrt{3}+1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } \bar{A} = 3$$

Si $m=-\sqrt{3}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
$C_1 \quad C_2 \quad C_1+C_2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = -5\sqrt{3}-6-4+5+4\sqrt{3}+6$$
$$= -\sqrt{3}+1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } \bar{A} = 3$$

Por el Th de Rouche Frobenius

Si $m \neq \pm\sqrt{3}$

Rango A = Rango $\bar{A}$ = 3 = nº incog $\Rightarrow$ S.C. Determinado

Si $m = \pm\sqrt{3}$

Rango $A = 2 < 3 =$ Rango $\bar{A}$ $\Rightarrow$ S Incompatible

Resuelvo por Cramer para $m \neq \pm\sqrt{3}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 4 \\ m & 3 & m^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-5m^2-6+8m-(5m-4m^2-12)}{m^2-3} =$$
$$= \frac{-m^2+3m+6}{m^2-3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & m & m^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2m^2+2m-4-(-2+4m-2m^2)}{m^2-3} = \frac{-2m-2}{m^2-3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & m \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{5m\cancel{-6}-4+5-4m\cancel{+6}}{m^2-3} = \frac{m+1}{m^2-3}$$

④ $X \equiv$ nº vehículos marca X
$y \equiv$ " " " Y
$z \equiv$ " " " Z

Tengo las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=21000 \\ 12x+15y+2z=32200 \\ x=\frac{40}{100}(y+z) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=21000 \\ 12x+15y+20z=322000 \\ 10x-4y-4z=0 \end{array}\right\}$$

Resuelvo por Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 12 & 15 & 20 & 322000 \\ 10 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-10F_1]{F_2-12F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 0 & 3 & 8 & 70.000 \\ 0 & -14 & -14 & -210000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F_3+14F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 0 & 3 & 8 & 70000 \\ 0 & 0 & 70 & 350000 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow x = 21000-5000-10000=6000 \\ \rightarrow y=\frac{70000-8\cdot 5000}{3}=10000 \\ \rightarrow z=\frac{350000}{70}=5000 \end{array}$$

Se importan 6000 vehículos de la marca X, 10000 de la Y y 5000 de la Z.