EXAMEN 2°A MAT. APLIC. CCSS. II

SOLUCIONES (salvo error u omisión) 28-11-05

1° a/ i/ $M = B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (2, 1\ -1) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

ii/ $P = M - I = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Calculo $|P| = 30+12+12-(18+24+10) = 54-52 = 2 \Rightarrow \exists P^{-1}$

Calculo la matriz de los adjuntos

$$Adj = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ +3 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$P^{-1} = \frac{(Adj)^t}{|P|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & +3 & -3 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 2 & +3/2 & -3/2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

iii/ $P\bar{X} = D \Rightarrow P^{-1} P \cdot X = P^{-1} D \Rightarrow X = P^{-1} D$

Es decir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & +3/2 & -3/2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ -8+4 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b/ Una matriz tiene inversa si su determinante es diferente de cero, por tanto

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m\cancel{-1}\cancel{+1} + m^2 - (m+1+m(m-1)) =$$

$$= m + m^2 - (\cancel{m}+1+m^2-\cancel{m}) =$$

$$= m + \cancel{m^2} - 1 - \cancel{m^2} = m-1$$

$m-1=0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow A$ tiene inversa $\forall m \neq 1$

② a/ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$

Calculo Rango A

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow$ Rango $A \geq 2$ (1^a y 2^a filas y columnas son linealmente independientes)

$|A| = -1 + 2a - (a^2) = -a^2 + 2a - 1$

$-a^2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$

$a = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$

Por ~~tanto~~

Rango $A = 2$ si $a = 1$

Rango $A = 3$ si $a \neq 1$

Calculo Rango $\bar{A}$

Sé que si $a \neq 1$ Rango $\bar{A} = 3$

Para $a = 1$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Se ve que la 1^a y la 4^a columnas son iguales y por ~~tanto~~ Rango $\bar{A} = 2$

Por el T. de Rouche-Frobenius

Si $a \neq 1$

Rango A = Rango $\bar{A} = 3 =$ nº incog $\Rightarrow$ S. COMP. DET

Si $a = 1$ Rango A = Rango $\bar{A} = 2 < 3 =$ nº incog $\Rightarrow$ S. COMP. INDET que depende de 1 parámetro

b/ $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -K & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calculo Rango A

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow$ Rango $A \geq 0$ (1^a y 3^a filas y columnas lin. indep)

$|A| = 2K + 2 + 45 - (-5K + 3 - 12) = 7K + 56 \Rightarrow 7K + 56 = 0 \Rightarrow K = -8$

Por tanto

Si $K \neq -8 \Rightarrow$ Rango $A = 3$

Si $K = -8 \Rightarrow$ Rango $A = 2$

Como el sistema es homogéneo se cumple que Rango A = Rango $\bar{A}$

Por el T de Rouche-Frobenius

Si $K \neq -8$

Rango A = Rango $\bar{A} = 3 = n^o$ incog $\Rightarrow$ S. COMP. DET

Si $K = 8$

Rango A = Rango $\bar{A} = 2 < 3 = n^o$ incog $\Rightarrow$ S COMP INDET depende de 1 parámetro.

Solución del sistema

Si $K \neq -8$ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ (sist. homogeneo)

Si $K = -8$ (elimino la 2ª ecuación)

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Llamo } z = \lambda \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Resuelvo por Cramer ; $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 19$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ \lambda & 2 \end{vmatrix}}{19} = \frac{\lambda}{19} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 5 & \lambda \end{vmatrix}}{19} = \frac{7\lambda}{19}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{\lambda}{19}, \frac{7\lambda}{19}, \lambda\right)$$

3º a/

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & K \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ K \end{pmatrix}$$

Estudio Rango A

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow$ Rango $A \geq 2$ (1ª y 2ª filas y columnas lin. indep)

$$|A| = -\cancel{2} + \cancel{2} + K - (2 + 1 - 2K) = K - 3 + 2K = 3K - 3$$

$$3K - 3 = 0 \Rightarrow K = 1$$

Si $K \neq 1 \Rightarrow$ Rango $A = 3$

Si $K = 1 \Rightarrow$ Rango $A = 2$

Veo ahora Rango $\bar{A}$

Si $K \neq 1 \Rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3$

Si $K = 1$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sé que C_3 es comb. lineal de C_1 y C_2. Veo que ocurre con C_4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2-3-(-1+6) = -1-5 = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } \bar{A} = 3$$

Por el T de Rouche-Frobenius

Si $K \neq 1$

Rango A = Rango $\bar{A} = 3$ = nº incog $\Rightarrow$ S.COMP. DET.

Si $K = 1$

Rango A < Rango $\bar{A}$ $\Rightarrow$ S. INCOMP.

Resuelvo por Cramer para $K = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$|A| = 3 \cdot 2 - 3 = 3$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{6+4-(4+3)}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3-2-(-3+4)}{3} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{3} = -\frac{3}{3} = -1$$

$\Rightarrow$ Solución $(x, y, z) = (1, 0, -1)$

b/

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Calculo el determinante de A

$|A| = 0$, por tanto el sistema no puede ser COMP. DET. Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ Rango $A = 2$ (1ª y 2ª filas indep)

Estudio el rango de $\bar{A}$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Sé que la C_3 depende linealmente de la C_1 y C_2. Veo qué ocurre con la C_4

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4-1-6-(3-4-2) = -3+3 = 0 \Rightarrow \text{Rango } \bar{A} = 2$$

Por tanto, por el T. de Rouche-Frobenius el sistema es COMP. INDET.

Elimino la tercera ecuación y llamo a z λ:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=1-\lambda \\ x+y=2+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 2+\lambda \end{pmatrix}$$

$|A|=2$ y por tanto, aplicando la regla de Cramer

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2+\lambda & 1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{1-\lambda+2+\lambda}{2}=\frac{3}{2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 2+\lambda \end{vmatrix}}{2}=\frac{2+\lambda-1+\lambda}{2}=\frac{2\lambda+1}{2}$$

Solución $(x,y,z)=\left(\frac{3}{2},\frac{2\lambda+1}{2},\lambda\right)$

4º a/

$$\begin{vmatrix} 2p & 2q & 2r \\ 2a & 2b & 2c \\ 2u & 2v & 2w \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 2\cdot 2\cdot 2\begin{vmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ u & v & w \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -8\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}=$$

$$\underset{(3)}{=} -8\cdot 25=-200$$

(1) Si una fila está multiplicada por un número el det. queda multiplicado por dicho número.

(2) Si intercambio dos filas el det. cambia de signo

(3) Por hipótesis

b/

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 527 \\ 2 & 8 & 289 \\ 6 & 4 & 646 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 17\cdot a \\ 2 & 8 & 17\cdot b \\ 6 & 4 & 17\cdot c \end{vmatrix}=$$

$$\underset{(3)}{=} 17\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 & a \\ 2 & 8 & b \\ 6 & 4 & c \end{vmatrix}=17\cdot d \Rightarrow \text{es múltiplo de } 17$$

(1) $C_3+10C_2+100C_1$. Si a una columna le sumo un múltiplo de otra el det no varía

(2) Por hipótesis

(3) Ver nota (1) del apartado anterior.