SOLUCIONES EXAMEN MAT. APLIC. CCSS II

(salvo error u omisión) 27-10-05

1º a/ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3F_3-4F_1]{3F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 5 & -11 & -21 \\ 0 & 4 & -25 & -33 \end{array}\right) \xrightarrow{5F_3-4F_2}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 5 & -11 & -21 \\ 0 & 0 & -81 & -81 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 3x = 9-2y-4z = 9+4-4=9 \quad x = 9/3 = 3 \\ \Rightarrow 5y = -21+11\cdot z = -21+11 = -1 \Rightarrow y = \frac{-10}{5} = -2 \\ \Rightarrow -81z = -81 \Rightarrow z = 1 \end{array}$

Solución $(x,y,z) = (3,-2,1)$

b/ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & -5 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \\ 3 & 1 & -5 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 7 & 5 & 21 \\ 0 & 7 & 7 & 21 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 7 & 5 & 21 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x = -5+2y+4z = -5+6 = 1 \\ \Rightarrow 7y = 21-5z = 21 \Rightarrow y = \frac{21}{7} = 3 \\ \Rightarrow z = 0 \end{array}$

Solución $(x,y,z) = (1,3,0)$

2º

Edades actuales		dentro de 5 años
Padre	$\equiv x$	$x+5$
Madre	$\equiv y$	$y+5$
Hijo	$\equiv z$	$z+5$

Edad madre triple hijo $\Rightarrow$ $y = 3z$

Suma edades 80 $\Rightarrow$ $x+y+z = 80$

en 5 años suma madre hijo 5 más que padre $\Rightarrow$ $(y+5)+(z+5) = (x+5)+5$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y-3z = 0 \\ x+y+z = 80 \\ x-y-z = 0 \end{array}\right\}$$

Resuelvo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -80 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -80 \end{array}\right)$$

$-8z=-80 \Rightarrow z=10 \Rightarrow y= \quad 3z \Rightarrow y=30 \Rightarrow x=80-x-y \Rightarrow x=40$

El padre tiene 40, la madre 30 y el hijo 10.

3°) a/ Cambio $F_1 \rightleftarrows F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & K & 1 \\ 2 & -1 & -1 & m \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & K-2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & m \end{array}\right) \xrightarrow{2F_3-F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & K-2 & 1 \\ 0 & 0 & 8-K & 2m-1 \end{array}\right) \Rightarrow (8-K)z = 2m-1$$

Si $8-K \neq 0 \Rightarrow K \neq 8$ S.C.D

Si $K=8$ y $2m-1=0 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$ SCI

Si $K=8$ y $m \neq \frac{1}{2}$ S Incompatible

b/ $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -K & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{por } z]{\text{Cambio } y} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -K \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_3-3F_1]{2F_2-F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -2K+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_3-F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -6K+6 \end{pmatrix}$$

Si $-6K+6=0 \Rightarrow K=1$ el sistema será Comp. Indeterminado y tendrá solución distinta de la trivial.

④ a/ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2x & 2x \\ 4 & 2x+1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2x+1 & 2x \\ 4 & 2x+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2 & 2x+2 \\ 6 & 2x+6 \end{pmatrix}$

$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+2 & 2x+2 \\ 6 & 2x+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} 2x+2=8 \Rightarrow x=3 \\ 2x+2=8 \Rightarrow x=3 \\ 6=6 \text{ (no aporta nada)} \\ 2x+6=12 \Rightarrow x=3 \end{array}\right\}$ es coherente!

Solución $x=3$

b/ $\left.\begin{array}{l} 2X+Y=A \\ X-3Y=B \end{array}\right\}$

Elimino X (calculo Y)

$$\begin{array}{rl} & 2X+Y=A \\ - & 2X-6Y=2B \\ \hline & 7Y=A-2B \\ & Y=\dfrac{A-2B}{7} \end{array}$$

Elimino Y (calculo X)

$$\begin{array}{rl} & 6X+3Y=3A \\ + & X-3Y=B \\ \hline & 7X=3A+B \\ & X=\dfrac{3A+B}{7} \end{array}$$

$$X = \frac{3A+B}{7} = \frac{1}{7}\left(3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 & 1/7 \\ 3/7 & 6/7 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{A-2B}{7} = \frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & -2/7 \\ -6/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

5º a/ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot\bar{X} = \bar{J}$

Calculo la matriz inversa de A por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_2-F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-3F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1/2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Por tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Como $A\cdot\bar{X} = \bar{J} \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot\bar{X} = A^{-1}\cdot\bar{J} \Rightarrow I\cdot\bar{X} = A^{-1}\cdot\bar{J} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{X} = A^{-1}\cdot\bar{J}$, tengo que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-6 \\ -5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es decir, la solución es $(x,y) = (4,-1)$

b/ $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se observa que A^2 es la matriz identidad, por tanto $A^3 = A^2\cdot A = I\cdot A = A$ ... y en general se ve que las potencias impares de A son A y las pares I

Dicho de otra forma

$$\left.\begin{array}{l} A^{2n+1} = A \\ A^{2n} = I \end{array}\right\} \quad \text{ó} \quad A^n = \begin{cases} A & \text{si } n \text{ es impar} \\ I & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Por tanto

$$A^{48} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad A^{2351} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$