

1) (1'5 puntos) Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si $A \cdot A^t = I$:

a) Estudiar si la siguiente matriz A es ortogonal.

$$A = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Siendo A la matriz del apartado anterior, resolver el sistema:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nota: La notación A^t significa matriz traspuesta de A .

2) (2'5 puntos) Sea el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a

$$\left. \begin{array}{l} x + y + (a+1)z = 9 \\ 3x - 2y + z = 20a \\ x + y + 2az = 9 \end{array} \right\}$$

- Discutir el sistema para los diferentes valores del parámetro a .
- Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.
- Resolver el sistema para $a=2$.

3) (2 puntos) Un taller dedicado a la confección de prendas de punto fabrica dos tipos de prendas: A y B. Para la confección de la prenda de tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de máquina. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquina. El taller dispone al mes como máximo de 85 horas para el trabajo manual y de 75 horas para el trabajo de máquina y debe confeccionar al menos 100 prendas. Si los beneficios son de 20 euros por cada prenda de tipo A y de 17 euros por cada prenda de tipo B, ¿cuántas prendas de cada tipo debe fabricar al mes, para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende éste?

4) (2 puntos) Una refinería utiliza dos tipos de petróleo, A y B, que compra a un precio de 350 euros y 400 euros por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de petróleo de tipo A que refina, obtiene 0,10 toneladas de gasolina y 0,35 toneladas de fuel-oil. Por cada tonelada de petróleo de tipo B que refina, obtiene 0,05 toneladas de gasolina y 0,55 toneladas de fuel-oil. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 toneladas de fuel-oil. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo. ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

5) (2 puntos) Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 kg de titanio y 1 kg de aluminio, mientras que para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 kg de titanio y 1 kg de aluminio. El beneficio que obtiene la empresa por cada 100 metros de cable de tipo A fabricado es igual a 1500 euros, y por cada 100 metros de cable de tipo B es igual 1000 euros. Calcúlense los metros de cable de cada tipo que han de fabricarse para maximizar el beneficio de la empresa y determínese dicho beneficio máximo.