EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD

ANÁLISIS

Junio 2000

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & si \quad x\leq 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & si \quad x>2 \end{cases}$$

(a) Estúdiese si *f (x)* es continua en el punto *x* = 2.
(b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a *f (x)* en el punto *x* = 3.
(c) Calcúlense sus asíntotas oblicuas.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Sea la función dependiente de los parámetros *a* y *b*:

$$f(x)=\begin{cases} -2x-a & si \quad x\leq 0 \\ x-1 & si \quad 0<x\leq 2 \\ bx-5 & si \quad x>2 \end{cases}$$

(a) Hállense los valores de *a* y *b* para que la función sea continua en el conjunto **R** de números reales.
(b) Represéntese gráficamente para los valores *a* = 0 y *b* = 3.
(c) Para los valores *a* = 0 y *b* = 3, hállese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas *x* = 1 y *x* = 3.

Septiembre 2000

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función, definida en los reales salvo en *x* = 0,

$$f(x)=3-x-\frac{2}{x}$$

(a) Las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

(b) El área de la región plana acotada limitada por la gráfica de *f*(*x*) y el semieje positivo *OX*.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función

$$s(t)=\frac{340+330t-10t^2}{t+2}$$

definida en los reales, salvo en t = -2, hállese:

(a) El valor positivo de t en el que se hace cero la función.

(b) El valor positivo de t en el que $s(t)$ se hace máximo.

(c) Las asíntotas de $s(t)$.

Junio 2001

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa fabrica cajas de latón sin tapa de volumen 500 cm^3, para almacenar un líquido colorante. Las cajas tienen la base cuadrada. Hállense la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de latón empleada en fabricarlas sea la miníma posible.

Ejercicio 2. (Puntuaci6n máxima: 3 puntos)
Dada la función

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+1$$

(a) Determínense sus máximos y mínimos relativos.

(b) Calcúlense sus puntos de inflexión.

(c) Esbócese su gráfica.

Septiembre 2001

Ejercicio 2. (Puntuación máxima 3 puntos)

Sean las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$, $\qquad g(x) = -x^2 + c$

(a) Determínense a, b y c, sabiendo que las gráficas de ambas funciones se cortan en los puntos (-2, -3) y (1, 0).

(b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto (-2, -3).

(c) Calcúlese el área de la región limitada por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función

$$f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

Calcúlense:

(a) Los intervalos donde es creciente y decreciente.

(b) Las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

(c) El valor de x para el que es máxima la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$.

Junio 2002

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

(a) Hallar las coordenadas del mínimo de la curva $y = x^2 - 4x - 5$.
(b) Calcular el área del triángulo limitado por el eje OX y las tangentes a la curva dada en los puntos de intersección de dicha curva con el eje OX.

2. (Puntuación máxima: 3 puntos) Se considera la curva de ecuación

$$y = x^3 - 4x.$$

(a) Hallar las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordenados y de sus máximos y mínimos relativos, si existen.

(b) Representar gráficamente la curva.

(c) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la curva y el eje OX.

Septiembre 2002

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Para cada valor de a, se considera la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - ax}{x+2}$. Se pide:

(a) Calcular el valor de a para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = 2$.

(b) Hallar las asíntotas de la curva $y = f(x)$ para el valor a = 3

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcular el valor de $a > 0$ en los siguientes casos:

$a)$ $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = a$

$b)$ $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x+1}\,dx = 3$

$c)$ $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+a}\,dx = 5$

Junio 2003

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sean las funciones $f(x) = x^2 - 9$, $g(x) = x^2 - x - 6$. Calcular:

a) $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{g(x)}$

(b) Los extremos relativos de $g(x)$, si existen.

(c) El área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 3$, $x = 6$.

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función $f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$

(a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(b) Calcular sus asíntotas.

(c) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$

Septiembre 2003

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función $f(x) = xe^{x^2}$.

(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa x=1.
(b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gáfica de $f(x)$ para $x \geq 0$, el eje OX y la recta x=2.

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función $f(x) = \frac{-x^3 + 1}{2x^2 + 2x - 12}$

Se pide:

(a) Especificar su dominio de definición.
(b) Estudiar su continuidad.
(c) Calcular las asíntotas si las hubiera.

Junio 2004

2. (Puntuación máxima: 3 puntos) Calcular la integral definida

$$\int_{-1}^{1} (|x| + x + 1)dx.$$

Nota.- La notación $|x|$ representa el valor absoluto de x.

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}.$$

(a) Determinar su dominio de definición.
(b) Obtener sus asíntotas.

Septiembre 2004

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{x^3}{a}-ax^2+5x+10, \quad a\neq 0$$

(a) Obtener los valores de a para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en $x=1$. (b) Calcular los extremos relativos de $f(x)$ para $a=3$ y representar la función.

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Sean las funciones:

$$f(x)=x^2-2x-8; \quad g(x)=-\frac{x^2}{2}+x+4$$

(a) Calcular $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)}{g(x)}$
(b) Calcular el área del recinto acotado limitado por las curvas $f(x)$ y $g(x)$.

Junio 2005

2. (Puntuación máxima: 3 puntos) La función

$$B(x)=\frac{-x^2+9x-16}{x}$$

representa, en miles de euros, el beneficio neto de un proceso de venta, siendo x el número de artículos vendidos. Calcular el número de artículos que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determinar dicho beneficio máximo.

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=e^{2-x}$ en el punto donde ésta corta al eje de ordenadas.
(b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=x^2-4x$, el eje OX y las rectas $x=-1$, $x=4$.

Septiembre 2005

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la curva de ecuación $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$. Se pide:

(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto de abscisa $x = 1$.

(b) Hallar las asíntotas de la curva.

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera la funci6n real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$$

(a) Hallar sus asíntotas.

(b) Calcular sus máximos y sus mínimos relativos, si existen.

Junio 2006

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = x^3 - 9x.$$

Se pide:

a) Calcular sus máximos y mínimos relativos, si existen.

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función f y el eje OX.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la curva de ecuación cartesiana:

$$y = x^2 + 8x.$$

Se pide:

a) Calcular las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta

$$y = 2x.$$

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva dada y de la recta de ecuación cartesiana

$$y = x + 8.$$

Septiembre 2006

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$$

(a) Encontrar las asíntotas de la función.

(b) Especificar el signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 9 - x^2 \quad , \quad g(x) = 3 + x$$

y obtener su área.

Junio 2007

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}$$

(a) Determinar las asíntotas de la función.

(b) Calcular sus máximos y mínimos y determinar sus intervalos de crecimiento.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{5}{4}x^2 \quad , \quad g(x) = \frac{1}{2}(5x + 20) \quad , \quad h(x) = \frac{1}{2}(-5x + 20)$$

y obtener su área.

Septiembre 2007

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$$

(a) Especificar su dominio de definición.

(b) Estudiar su continuidad.

(c) Calcular sus asíntotas, si las hubiera.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ satisface las siguientes propiedades:

- Pasa por el punto $(0,0)$.
- Tiene un máximo local en el punto $(1,2)$.

Se pide:

(a) Obtener el valor de los coeficientes a, b y c.

(b) Hallar el área de la región acotada del plano limitada por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 3x$, el eje OX y la recta $x = 1$.

Junio 2008

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las funciones reales de variable real:

$$f(x) = x^2 - x \qquad ; \qquad g(x) = 1 - x^2.$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x} \quad , \quad x \neq 0.$$

a) Determínense las asíntotas de f.
b) Calcúlense sus máximos y mínimos relativos y determínense sus intervalos de crecimiento.
c) Calcúlese la integral definida $\int_1^2 f(x)\,dx$.

Septiembre 2008

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se desea fabricar un acuario con base cuadrada y sin tapa, de capacidad 500 dm^3. La base y las paredes del acuario han de estar realizadas en cristal. ¿Cuáles deben ser sus medidas para minimizar la superficie total del cristal empleado?

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} \quad , \quad x \neq \pm 2.$$

a) Determínense las asíntotas de f.
b) Calcúlense los máximos y mínimos relativos de f y determínense sus intervalos de crecimiento.
c) Calcúlese la integral definida: $\int_3^5 (x^2 - 4) f(x)\,dx$.

Junio 2009

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = (x^2 - 1)^2.$$

a) Determínense los extremos relativos de f.
b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.
c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - a}.$$

a) Determínense las asíntotas de f, especificando los valores del parámetro real a para los cuales f tiene una asíntota vertical, dos asíntotas verticales, o bien no tiene asíntotas verticales.
b) Para $a = -1$, calcúlense los valores reales de b para los cuales se verifica que $\int_0^b f(x)\,dx = 0$.

Septiembre 2009

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 24 & \text{si} \quad x \leq -3 \\ x^2 + 9 & \text{si} \quad -3 < x \leq 2 \\ -x + 15 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Represéntese gráficamente la función f.
b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
El beneficio semanal (en miles de euros) que obtiene una central lechera por la producción de leche desnatada está determinado por la función:

$$B(x) = -x^2 + 7x - 10$$

en la que x representa los hectolitros de leche desnatada producidos en una semana.
a) Represéntese gráficamente la función $B(x)$ con $x \geq 0$.
b) Calcúlense los hectolitros de leche desnatada que debe producir cada semana la central lechera para maximizar su beneficio. Calcúlese dicho beneficio máximo.
c) Calcúlense las cantidades mínima y máxima de hectolitros de leche desnatada que debe producir la central lechera cada semana para no incurrir en pérdidas (es decir, beneficio negativo).