EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD

ÁLGEBRA

Junio 2000

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Siendo *a* un número real cualquiera, se define el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrcl} x & +2y & -az & = & 1 \\ & -y & +z & = & 0 \\ ax & & +z & = & a \end{array}\right\}$$

(a) Discútase dicho sistema en función del valor de *a*.
(b) Encuéntrense todas sus soluciones para *a* = 1.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Una empresa, especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas, produce cierto tipo de mesas y sillas que vende a 2000 pts y 3000 pts por unidad, respectivamente. Desea saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniéndose las siguientes restricciones:
El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de 4 por día y operario.
Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación; cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.
El material utilizado en cada mesa cuesta 400 pts. El utilizado en cada silla cuesta 200 pts. Cada operario dispone de 1.200 pts diarias para material.

Septiembre 2000

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264.000 euros. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del valor del dinero en euros.
Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 euros y un dólar es igual a 1,1 euros, se pide determinar la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

En un depósito se almacenan bidones de petróleo y de gasolina Para poder atender la demanda se han de tener almacenados un mínimo de 10 bidones de petróleo y 20 de gasolina. Siempre debe haber más bidones de gasolina que de petróleo, siendo la capacidad del depósito de 200 bidones. Por razones comerciales, deben mantenerse en inventario al menos 50 bidones. El gasto de almacenaje de un bidón de petróleo es de 20 pesetas y el de uno de gasolina es de 30 pesetas. Se desea saber cuántos bidones de cada clase han de almacenarse para que el gasto de almacenaje sea mínimo.

a) Exprésense la función objetivo y las restricciones del problema.

(b) Represéntese gráficamente la región factible y calcúlense los vértices de la misma.

(c) Resuélvase el problema.

Junio 2001

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ x+ay+z & = & a \\ x+y+az & = & a^2 \end{array}\right\}$$

(a) Discútase el sistema según los valores de *a*.

(b) Resuelvase el sistema para $a = -1$.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa que sirve comidas preparadas tiene que diseñar un menú utilizando dos ingredientes. El ingrediente A contiene 35 g de grasas y 150 Kilocalorías por cada 100 g de ingrediente, mientras que el ingrediente B contiene 15 g de grasas y 100 Kilocalorías por cada 100 g. El coste es de 150 pts por cada 100 g del ingrediente A y de 200 pts por cada 100 g del ingrediente B.
El menú a diseñar debería contener no más de 30 g de grasas y al menos 110 Kilocalorías por cada 100 g de alimento. Se pide determinar las proporciones de cada ingrediente a emplear en el menú de manera que su coste sea lo más reducido posible.

(a) Indíquese la expresión de las restricciones y la función objetivo del problema.

(b) Represéntese gráficamente la región delimitada por las restricciones.

(c) Calcúlese el porcentaje óptimo de cada ingrediente a incluir en el menú.

Septiembre 2001

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Determínese si A y B son invertibles y, en su caso, calcúlese la matriz inversa.

(b) Resuélvase la ecuación matricial $XA - B = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.

(c) Calcúlese A^{86}.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima 3 puntos)

Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4% en un cierto producto A, un 6% en el producto B y un 5% en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8% sobre el precio inicial de A, un 10% sobre el precio inicial de B y un 6% sobre el precio inicial de C.

Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta un producto A, dos B y tres C, se ahorra 16 euros respecto del precio inicial. Si compra tres productos A, uno B y cinco C en la segunda oferta, el ahorro es de 29 euros. Si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros.

Calcúlese el precio de cada producto antes de las ofertas.

Junio 2002

1. (Puntuación máxima: 3 puntos) Dadas las matrices

$$A=(2 \quad 1 \quad -1),\ B=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular las matrices $M=AB$ y $N=BA$.
(b) Calcular P^{-1}, siendo $P=(N-I)$, donde I representa la matriz identidad.
(c) Resolver el sistema $PX=C$.

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Un proyecto de asfaltado puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa: G1 y G2. Se trata de asfaltar tres zonas: A, B y C. En una semana, el grupo G1 es capaz de asfaltar 3 unidades en la zona A, 2 en la zona B y 2 en la zona C. El grupo G2 es capaz de asfaltar semanalmente 2 unidades en la zona A, 3 en la zona B y 2 en la zona C. El coste semanal se estima en 3300 euros para G1 y en 3500 euros para G2. Se necesita asfaltar un mínimo de 6 unidades en la zona A, 12 en la zona B y 10 en la zona C. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

Septiembre 2002

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Encontrar todas las matrices *X* tales que $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Determinar los valores máximo y mínimo de la función z = 3x + 4y sujeta a las restricciones:

$3x + y \geq 3$

$x + y \leq 5$

$x \geq -2$

$y \leq 10$

$y \geq 0$

Junio 2003

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Estudiar y resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Un vendedor quiere dar salida a 400 kg de garbanzos, 300 kg de lentejas y 250 kg de judías. Para ello hace dos tipos de paquetes. Los de tipo A contienen 2 kg de garbanzos, 2 kg de lentejas y 1 kg de judías y los de tipo B contienen 3 kg de garbanzos, 1 kg de lentejas y 2 kg de judías. El precio de venta de cada paquete es de 25 euros para los de tipo A y de 35 euros para los de tipo B ¿Cuántos paquetes de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende éste?

Septiembre 2003

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcular los valores de a para los cuales la inversa de la matriz

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$$

coincide con su traspuesta.

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Determinar los valores máximo y mínimo de la función $z = 5x+3y$ sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} 3x + y &\geq 4 \\ x + y &\leq 6 \\ 0 \leq y &\leq 5 \\ x &\leq 5 . \end{aligned}$$

Junio 2004

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Un producto se compone de la mezcla de otros dos A y B. Se tienen 500 kg de A y 500 kg de B. En la mezcla, el peso de B debe ser menor o igual que 1,5 veces el de A. Para satisfacer la demanda, la producción debe ser mayor o igual que 600 kg. Sabiendo que cada kg de A cuesta 5 euros y cada kg de B cuesta 4 euros, calcular los kg de A y B que deben emplearse para hacer una mezcla de coste mínimo, que cumpla los requisitos anteriores. Obtener dicho coste minino.

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Hallar todas las matrices

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \quad ; \quad a,b,c \in R$$

que satisfacen la ecuación matricial

$$X^2 = 2X.$$

Septiembre 2004

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real m:

$$\begin{cases} mx + y - 3z &= 5 \\ -x + y + z &= -4 \\ x + my - mz &= 1 \end{cases}$$

(a) Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro m.
(b) Resuélvase el sistema para m = 2.

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Un establecimiento de prendas deportivas tiene almacenados 1600 bañadores, 1000 gafas de baño y 800 gorros de baño. Se quiere incentivar la compra de estos productos mediante la oferta de dos tipos de lotes: el lote A, que produce un beneficio de 8 euros, formado por un bañador, un gorro y unas gafas, y el l()te B que produce un beneficio de 10 euros y está formado por dos bañadores y unas gafas. Sabiendo que la publicidad de esta oferta tendrá un coste de 1.500 euros a deducir de los beneficios, se pide calcular el número de lotes A y B que harán máximo el beneficio y a cuánto asciende éste.

Junio 2005

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Se pide:

(a) Discutir el sistema para los distintos valores de k.

(b) Resolver el sistema en los casos en los que sea posible.

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Un mayorista vende productos congelados que presenta en envases de dos tamaños: pequeño y grande. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 envases grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro para cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro para cada envase grande. ¿Qué cantidad de cada tipo de envases proporciona el mínimo gasto de almacenaje? Obtener dicho mínimo.

Septiembre 2005

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
En una empresa de alimentación se dispone de 24 kg de harina de trigo y 15 kg de harina de maíz, que se utilizan para obtener dos tipos de preparados: A y B. La ración del preparado A contiene 200 gr de harina de trigo y 300 gr de harina de maíz, con 600 cal de valor energético. La ración de B contiene 200 gr de harina de trigo y 100 gr de harina de maíz, con 400 cal de valor energético. ¿Cuántas raciones de cada tipo hay que preparar para obtener el máximo rendimiento energético total? Obtener el rendimiento máximo.

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones que depende del parámetro real p

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ -x + 2y + pz &= -3 \\ x - 2y - z &= p \end{cases}$$

(a) Discutir el sistema según los distintos valores de p.

(b) Resolver el sistema para p = 2.

Junio 2006

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una papelería quiere liquidar hasta 78 kg de papel reciclado y hasta 138 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A y B. Los lotes A están formados por 1 kg del papel reciclado y 3 kg de papel normal y los lotes B por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote A es de 0,9 euros y el de cada lote B es de 1 euro. ¿Cuántos lotes A y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos?

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Encontrar todas las matrices X cuadradas 2×2 que satisfacen la igualdad

$$XA = AX$$

en cada uno de los dos casos siguientes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Septiembre 2006

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa fabrica láminas de aluminio de dos grosores, finas y gruesas, y dispone cada mes de 400 kg de aluminio y 450 horas de trabajo para fabricarlas. Cada m^2 de lámina fina necesita 5 kg de aluminio y 10 horas de trabajo, y deja una ganancia de 45 euros. Cada m^2 de lámina gruesa necesita 20 kg y 15 horas de trabajo, y deja una ganancia de 80 euros. ¿Cuántos m^2 de cada tipo de lámina debe fabricar la empresa al mes para que la ganancia sea máxima, y a cuánto asciende ésta?

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = 2 \\ -2x & +3y & +z & = 1 \\ -x & +ay & +3z & = 3 \end{array} \right.$$

(a) Discutir el sistema para los distintos valores de a.

(b) Resolver el sistema para $a = 2$.

Junio 2007

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & az & = & 8 \end{array} \right.$$

(a) Discutir el sistema para los distintos valores de a.

(b) Resolver el sistema para $a = 4$.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 de titanio y 1 de aluminio, mientras que para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 de titanio y 1 de aluminio. El beneficio que se obtiene por 100 metros de cable de tipo A es de 1500 euros, y por 100 metros de cable de tipo B, 1000 euros.

Calcular los metros de cable de cada tipo que hay que fabricar para maximizar el beneficio de la empresa. Obtener dicho beneficio máximo.

Septiembre 2007

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dado el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

(a) Discutir el sistema para los distintos valores de a.

(b) Resolver el sistema para $a = 3$ y $a = 1$.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una aerolínea quiere optimizar el número de filas de clase preferente y de clase turista en un avión. La longitud útil del avión para instalar las filas de asientos es de 104 m, necesitándose 2 m para instalar una fila de clase preferente y 1,5 m para las de clase turista. La aerolínea precisa instalar al menos 3 filas de clase preferente y que las filas de clase turista sean como mínimo el triple que las de clase preferente. Los beneficios por fila de clase turista son de 152 euros y de 206 euros para la clase preferente.

¿Cuántas filas de clase preferente y cuántas de clase turista se deben instalar para obtener el beneficio máximo? Indicar dicho beneficio.

Junio 2008

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Un agricultor tiene repartidas sus 10 hectáreas de terreno en barbecho, cultivo de trigo y cultivo de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que en barbecho tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo de trigo y cebada. ¿Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los cultivos y cuántas están en barbecho?

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Un distribuidor de aceite de oliva compra la materia prima a dos almazaras, A y B. Las almazaras A y B venden el aceite a 2000 y 3000 euros por tonelada, respectivamente. Cada almazara le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para atender a su demanda, el distribuidor debe comprar en total un mínimo de 6 toneladas. El distribuidor debe comprar como máximo a la almazara A el doble de aceite que a la almazara B. ¿Qué cantidad de aceite debe comprar el distribuidor a cada una de las almazaras para obtener el mínimo coste? Determínese dicho coste mínimo.

Septiembre 2008

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Una empresa instala casas prefabricadas de tres tipos A, B y C. Cada casa de tipo A necesita 10 horas de albañilería, 2 de fontanería y 2 de electricista. Cada casa de tipo B necesita 15 horas de albañilería, 4 de fontanería y 3 de electricista. Cada casa de tipo C necesita 20 horas de albañilería, 6 de fontanería y 5 de electricista. La empresa emplea exactamente 270 horas de trabajo al mes de albañilería, 68 de fontanería y 58 de electricista. ¿Cuántas casas de cada tipo instala la empresa en un mes?

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se desea invertir una cantidad de dinero menor o igual que 125000 euros, distribuidos entre acciones del tipo A y del tipo B. Las acciones del tipo A garantizan una ganancia del 10% anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 30000 euros y un máximo de 81000 euros. Las acciones del tipo B garantizan una ganancia del 5% anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 25000 euros. La cantidad invertida en acciones del tipo B no puede superar el triple de la cantidad invertida en acciones del tipo A. ¿Cuál debe ser la distribución de la inversión para maximizar la ganancia anual? Determínese dicha ganancia máxima.

Junio 2009

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+kz & = & 4 \\ 2x-y+2z & = & 5 \\ -x+3y-z & = & 0 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro k.
b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para $k=0$.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Una refinería utiliza dos tipos de petróleo, A y B, que compra a un precio de 350 euros y 400 euros por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de petróleo de tipo A que refina, obtiene 0,10 toneladas de gasolina y 0,35 toneladas de fuel-oil. Por cada tonelada de petróleo de tipo B que refina, obtiene 0,05 toneladas de gasolina y 0,55 toneladas de fuel-oil. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 toneladas de fuel-oil. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo. ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

Septiembre 2009

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Una carpintería vende paneles de contrachapado de dos tipos A y B. Cada m^2 de panel del tipo A requiere $0,3$ horas de trabajo para su fabricación y $0,2$ horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 4 euros. Cada m^2 de panel del tipo B requiere $0,2$ horas de trabajo para su fabricación y $0,2$ horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 3 euros. Sabiendo que en una semana se trabaja un máximo de 240 horas en el taller de fabricación y de 200 horas en el taller de barnizado, calcular los m^2 de cada tipo de panel que debe vender semanalmente la carpintería para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ x+ky+z & = & 3 \\ kx-3z & = & 6 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.
b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para $k=3$.